Skizze zur Nachklausur

Aufgabe 1:

Sei A ein Ring, und seien $I, J \subset A$ beliebige Ideale.

i) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Zeige, dass $I \cdot J \subset \mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn $I \subset \mathfrak{p}$ oder $J \subset \mathfrak{p}$.

ii) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ bezeichne $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid \exists\, n > 0 : \; x^n \in \mathfrak{a}\}$ das Radikalideal. Zeige, dass für die Radikalideale $\mathrm{rad}(I \cdot J) = \mathrm{rad}(I) \cap \mathrm{rad}(J)$ gilt.

i) Falls $I \subset \mathfrak{p}$ oder $J \subset \mathfrak{p}$, dann gilt offensichtlich $I \cdot J \subset \mathfrak{p}$. Umgekehrt nehme an, dass $I \not\subset \mathfrak{p}$ und $J \not\subset \mathfrak{p}$. Seien $x \in I \backslash \mathfrak{p}$ und $y \in J \backslash \mathfrak{p}$ beliebig. Dann ist $x \cdot y \in I \cdot J$. Die Primeigenschaft von $\mathfrak{p}$ impliziert, dass $x \cdot y \notin \mathfrak{p}$. Das zeigt $I \cdot J \not\subset \mathfrak{p}$.

ii) Dies folgt aus i) und der Formel $\mathrm{rad}(\mathfrak{a}) = \cap_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}$.

Aufgabe 2:

Sei $k[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über einem Körper k.

i) Beschreibe die Menge $\mathrm{Spec}(k[X])$ durch Elemente aus $k[X]$, und gib die abgeschlossenen Punkte in der Zariski-Topologie an.

ii) Gib die in der Zariski-Topologie offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(k[X])$ an.

i) Als Mengen gilt

$$\mathrm{Spec}(k[X]) = \{(f) \mid f \in k[X] \backslash \{0\} \text{ irreduzibel und normiert}\} \cup \{0\}.$$

Alle Punkte aus $\mathrm{Spec}(k[X]) \backslash \{0\}$ sind abgeschlossen.

ii) Die offenen Mengen sind $\varnothing$, $\mathrm{Spec}(k[X])$ und Komplemente endlich vieler abgeschlossener Punkte.

Aufgabe 3:

Sei A ein Ring, und sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Sei $N \subset M$ ein A-Untermodul.

i) Gib eine Voraussetzung an A an, die sichert, dass auch N endlich erzeugt über A ist.

ii) Gib ein Beispiel an, in dem N nicht endlich erzeugt über A ist.

i) Eine hinreichende Bedingung an A ist die Eigenschaft 'noethersch'.

ii) Sei $A = \mathbb{Q}[X_i]_{i \in \mathbb{N}}$ und $M = A$. Betrachte das Ideal $N = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Aufgabe 4:

Bestimme die Krulldimension der folgenden Ringe.

i) $\mathbb{Z}[i]$;

ii) $k[X] \otimes_k k[Y]$, k Körper;

iii) $\mathbb{Q}[U, V, W]/(W^2 - VW + U)$.

i) Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Hauptidealring, und daher $\dim(\mathbb{Z}[i]) = 1$.

ii) Es gilt $\dim(k[X] \otimes_k k[Y]) = \dim(k[X]) + \dim(k[Y])$ nach einer Übungsaufgabe. Da Polynomringe in einer Unbestimmten über Körpern die Hauptidealeigenschaft erfüllen, gilt $\dim(k[X] \otimes_k k[Y]) = 1 + 1 = 2$.

iii) Version 1: Sei $A = \dim(\mathbb{Q}[U, V, W]/(W^2 - VW + U))$. Nach einer Übungsaufgabe gilt $\dim(A) = \dim(\mathbb{Q}[U, V, W]) - 1$. Also ist $\dim(A) = 3 - 1 = 2$.

Version 2: Der $\mathbb{Q}$-Algebrenmorphismus $A \to \mathbb{Q}[X, Y], U \mapsto X \cdot Y, V \mapsto X + Y, W \mapsto X$ ist ein Isomorphismus, siehe Aufgabe 5 ii). Daher gilt $\dim(A) = 2$.

Aufgabe 5:

Bestimme für folgende Ringerweiterungen $R \subset S$ den ganzen Abschluss von R in S.

i) $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $S = k(X_1, \ldots, X_n)$, $n \geq 1$, k Körper;

ii) $R = \mathrm{im}(\varphi)$ das Bild des $\mathbb{Q}$-Algebrenmorphismus $\varphi : \mathbb{Q}[U, V] \to \mathbb{Q}[X, Y], U \mapsto X \cdot Y, V \mapsto X + Y$, $S = \mathbb{Q}(X, Y)$;

iii) $R = \mathbb{Q}$, $S = \mathbb{Q}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{C} \backslash \bar{\mathbb{Q}}$ nicht algebraisch.

i) Der Ring R ist faktoriell und damit ganzabgeschlossen.

ii) Die Erweiterung $R \subset \mathbb{Q}[X, Y]$ ist ganz, denn $R[X] = \mathbb{Q}[X, Y]$ und X erfüllt die Ganzheitsgleichung $X^2 - (X + Y)X + XY = 0$. Nach i) ist $\mathbb{Q}[X, Y]$ der ganze Abschluss von R in S.

iii) Sei $f \in S$ ganz über R. Da τ transzendent ist, gilt $f \in \mathbb{Q}[\tau]$ nach i), und somit $f \in R$.

Aufgabe 6:

Sei A ein noetherscher Ring. Sei $A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten, und sei $A[\![X]\!]$ der Potenzreihenring. Sei $a \in A$ beliebig. Zeige, dass $X - a$ kein Nullteiler in $A[\![X]\!]$ ist.

Version 1: Der Ring $A[\![X]\!]$ ist die Komplettierung des noetherschen Ringes $A[X]$ in dem Ideal (X). Das Polynom $X - a$ ist kein Nullteiler in $A[X]$, und damit auch kein Nullteiler in $A[\![X]\!]$ nach einer Übungsaufgabe.

Version 2: Sei $F = \sum_{i \geq 0} r_i X^i$ ein Element in $A[\![X]\!]$ mit der Eigenschaft $(X - a)F = 0$. Wir dürfen annehmen, dass $r_0 \neq 0$. Ausmultiplizieren liefert die Gleichungen $a \cdot r_0 = 0$ und $a \cdot r_{i+1} = r_i$ für $i \geq 0$. Daraus folgt $a^{i+1} r_i = 0$ für alle $i \geq 0$. Da A noethersch ist, existiert ein $i_0 >> 0$ mit $a^{i_0} r_i = 0$ für alle $i \geq i_0$. Und damit

$$r_i = a^{i_0} \cdot r_{i+i_0} = 0,$$

für alle $i \geq 0$. Das zeigt $F = 0$.