Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

2. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Seien a und b reelle Zahlen. Beweise, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & - & a^2z & = 0 \\ & & y & + & (b-2a)z & = 0 \\ bx & - & by & + & a^2z & = 0 \end{array}$$

genau dann eine von $(0,0,0)$ verschiedene Lösung besitzt, wenn entweder $a = b$ oder $a = -b$ gilt. Bestimme in diesen Fällen die genaue Lösungsmenge.

Aufgabe 2:

(a) Gibt es ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten über den reellen Zahlen, dessen Lösungsmenge die Menge $\{(x,z) \mid x + 2y = 0\}$ ist ?

(b) Gibt es ein lineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten über den reellen Zahlen, dessen Lösungsmenge die Menge $\{(x,z) \mid x^2 - y = 0\}$ ist ?

Aufgabe 3:
Es sei n eine ganze Zahl. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} nx & + & (n+1)y & + & (n+2)z & = 0 \\ (n+3)x & + & (n+4)y & + & (n+5)z & = 0 \\ (n+6)x & + & (n+7)y & + & (n+8)z & = 0 \end{array}$$

nicht nur die triviale Lösung besitzt.

Aufgabe 4:
Es seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ reelle Zahlen mit $a_i \neq b_i$ für alle i. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_{n+1} & = 0 \\ b_1x_1 & + & a_1x_2 & + & a_1x_3 & + & \dots & + & a_1x_{n+1} & = 0 \\ b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & a_2x_3 & + & \dots & + & a_2x_{n+1} & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & + & \dots & + & a_nx_{n+1} & = 0 \end{array}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

3. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Sei $F = \{0, 1, a\}$ ein dreielementige Menge. Zeige, dass es genau eine Möglichkeit gibt auf F die Struktur eines Körpers zu erklären, so dass 0 das neutrale Element der Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation ist. Gehe dazu wie folgt vor.

(i) Zeige, dass $a = 1 + 1 = -1$ in F gelten muss.

(ii) Stelle Additions- und Multiplikationstafeln für F auf und begründe, dass es hierfür nur eine Möglichkeit gibt.

(iii) Zeige, dass es eine surjektive Abbildung $\mathbb{Z} \to F$ gibt, für die $f(a + b) = f(a) + f(b)$ sowie $f(ab) = f(a)f(b)$ gilt. Folgere daraus die Gültigkeit der Assoziatv- und Distributivgesetze in F.

Aufgabe 2:
Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt } a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = a+b\sqrt{2}\}$ mit der Addition und Multiplikation der reellen Zahlen ein Körper ist.

Aufgabe 3:

(i) Veranschauliche die Unterräume $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$ und $V = \{a(2, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}^2$, sowie deren Durchschnitt, Summe und Vereinigung geometrisch.

(ii) (a) Ist $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid xy = 1\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?
(b) Ist $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?
(c) Ist $\mathbb{Q}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}$?

Aufgabe 4:
Sei K ein Körper.

(i) Bestimme alle Untervektorräume des K-Vektorraums K.

(ii) Bestimme alle Untervektorräume des K-Vektorraums K^2.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

4. Semesterwoche

Aufgabe 1:

(i) Auf einer Menge V sei eine assoziative Verknüpfung $\oplus$ mit neutralem Element $e \in V$ definiert, d.h.

  (a) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ für alle $a, b, c \in V$,
  (b) $a \oplus e = e \oplus a = a$ für alle $a \in V$.

  Ferner gelte

  (c) $a \oplus a = e$ für alle $a \in V$.

  Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen und definiere eine Verknüpfung $\odot : \mathbb{F}_2 \times V \to V$ durch

$$0 \odot a = e, \ 1 \odot a = a \text{ für alle } a \in V.$$

  Zeige, dass V mit den oben definierten Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

(ii) Sei M eine Menge und $V = \mathbb{P}(M)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von M. Setze $e = \emptyset \in \mathbb{P}(M)$ und

$$A \oplus B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

  für $A, B \in \mathbb{P}(M)$. Zeige, dass die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Teil (i) erfüllt sind.

Aufgabe 2:

Erzeugen die folgenden Vektoren den Vektorraum $\mathbb{Q}^4$?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und fasse die Potenzmenge $\mathbb{P}(M)$ wie in Aufgabe 1 als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum auf.

(i) Berechne sämtliche Linearkombinationen der folgenden Vektoren in $\mathbb{P}(M)$:

$$a = \{1, 6, 7\}, \ b = \{2, 5, 7\}, \ c = \{3, 5, 6\}, \ d = \{4, 5, 6, 7\}.$$

  Sind diese vier Vektoren linear abhängig.

(ii) Bestimme eine Basis von $\mathbb{P}(M)$.

Aufgabe 4:

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Ferner seien $a_i \in K$ und $v_i \in V$, $i = 1, 2, 3$, wobei $a_1, a_3 \neq 0$. Es gelte

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0.$$

Zeige, dass $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle$ gilt.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

5. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Es $V = \mathbb{R}[X]$ die Menge aller Polynome in der Unbestimmten X mit reellen Koeffizienten, d.h.

$$V = \left\{ \sum\nolimits_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Zeige, dass V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(ii) Gib eine Basis von V an.

(iii) Für welche natürliche Zahl $n \geq 2$ bilden die $n+1$ Polynome

$$p_1(X) = X + 1,\ p_2(X) = X^2 + X,\ p_3(X) = X^3 + X^2, \ldots,\ p_n(X) = X^n + X^{n-1}$$

und $p_{n+1}(X) = 1 + X^n$ eine linear unabhängige Menge von V?

Aufgabe 2:
Sei $n \geq 2$ und K ein Körper. Sei U der folgende Unterraum des K^n:

$$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}.$$

Zeige, dass die Elemente

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, -1, 0, 0, \ldots, 0), \\ b_2 &= (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= (0, 0, \ldots, 0, 1, -1) \end{aligned}$$

eine Basis von U bilden. Schreibe ein Element $(x_1, \ldots, x_n)$ in U als Linearkombination der b_i.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien $A, B \subset V$ Teilmengen. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen.

(i) $\langle A \cap B \rangle \subset \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$,

(ii) $\langle A \cap B \rangle \supset \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$,

(iii) $\langle \langle A \rangle \cap \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$,

(iv) $\langle A \cup B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$.

Aufgabe 4:
Sei $n \geq 1$ und seien $U_1, \ldots, U_n$ endlich dimensionale Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeige:

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim U_i - \sum_{i=2}^{n} \dim(U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i.$$

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

6. Semesterwoche

Aufgabe 1:

(i) Bestimme den Rang der Matrix.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

in Abängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass der Rang von A über $\mathbb{Q}$ mit dem Rang von A über $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Aufgabe 2:
Zeige, dass der Rang einer Matrix gleich dem Maximum der Ränge aller quadratischen Untermatrizen ist.

Aufgabe 3:
Welche der folgenden Abbildungen $K^3 \to K^2$ sind linear?

(i) $K = \mathbb{Q}$ und $(x, y, z) \mapsto (4x + z, y)$.

(ii) $K = \mathbb{F}_2$ und $(x, y, z) \mapsto (x + y, y + z)$.

(iii) $K = \mathbb{Q}$ und $(x, y, z) \mapsto (y^2, z)$.

(iv) $K = \mathbb{F}_2$ und $(x, y, z) \mapsto (y^2, x)$.

Aufgabe 4:
Für ein $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

(i) Zeige, dass f_a linear ist und dass alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ von dieser Gestalt sind.

(ii) Zeige, dass die Menge $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum ist.

(iii) Bestimme die Dimension von H.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

7. Semesterwoche

Aufgabe 1:

(i) Sei K ein Körper, seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume und seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen mit $V = \ker f + \ker g$ und $W = \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$. Zeige, dass $f + g$ surjektiv ist.

(ii) Zeige anhand eines Beispiels, dass im Allgemeinen die Summer zweier surjektiver linearer Abbildungen nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2:
Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraumes V mit $f^2 = f$. Zeige, dass $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ Komplementärräume in V sind.

Aufgabe 3:
Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Zeige:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim W \leq \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \min(\operatorname{rg} f, \operatorname{rg} g).$$

Aufgabe 4:
Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen. Zeige: Ist $g \circ f$ ein Isomorphismus, so sind $\operatorname{im} f$ und $\ker g$ Komplementärräume in V.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann

WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

8. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $f : V \to K$ eine lineare Abbildung, die nicht die Nullabbildung ist. Zeige: Ist $v \in V \backslash \ker f$, so sind $\ker f$ und $\langle v \rangle$ Komplementärräume in V.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und seien $\lambda_{ij} \in K$, $1 \leq i < j \leq n$. Betrachte die folgenden $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K:

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \; N_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \dots & \dots & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Sei M der K-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K. Zeige:

(i) Die Menge $V_0 = \{x \in M \mid XN_0 = N_0X\}$ ist ein Unterraum der Dimension n von M.

(ii) Die Menge $V_1 = \{X \in M \mid XN_0 = N_1X\}$ ist ein Unterraum der Dimension n.

Aufgabe 3:
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ Komplementärräume in V. Beründe, dass $H_1 = \mathrm{Hom}(U, U)$, $H_2 = \mathrm{Hom}(U, W)$, $H_3 = \mathrm{Hom}(W, W)$ und $H_4 = \mathrm{Hom}(W, U)$ in natürlicher Weise Unterräume von $\mathrm{Hom}(V, V)$ sind und zeige, dass für alle i stets $H_i \cap \sum_{j \neq i} H_j = 0$ ist, und dass $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \mathrm{Hom}(V, V)$ gilt.

Aufgabe 4:
Sei V ein K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass für jedes $v \in V$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) = 0$ existiert. Zeige, dass die Abbildung $\mathrm{id} - f$ ein Isomorphismus ist.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

9. Semesterwoche

Aufgabe 1:

(i) Sei K ein Körper und seien $a, b, c, d \in K$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechne die inverse Matrix.

(ii) Sei für $i = 1, \ldots, m$ die Matrix A_i eine invertierbare $n_i \times n_i$-Matrix. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechne ihr Inverses.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und V der K-Vektorraum der 2×2 Matrizen über K. Sei $A \in V$ eine feste 2×2-Matrix. Die lineare Abbildung $L_A : V \to V$ sei definiert durch $X \mapsto AX - XA$.

(i) Durch welche Matrix wird L_A bezüglich der Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von V beschrieben, wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist.

(ii) Berechne $\dim(\operatorname{im} L_A)$ und $\dim(\ker L_A)$ in Abhängigkeit von der Matrix A.

(iii) Gib im Fall $L_A \neq 0$ eine Basis von $\ker L_A$ an.

(iv) Gib einen von A unabhängigen 3-dimensionalen Unterraum $W \subset V$ an, so dass $\operatorname{im} L_A \subset W$ für alle $A \in V$ gilt.

Aufgabe 3:

Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und sei $n \geq 1$.

(i) Bestimme die Anzahl der Elemente von K^n.

(ii) Bestimme die Anzahl der Elemente von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $\mathrm{GL}_n(K)$ Untergruppen sind.

(i) $D = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j\}$,

(ii) $D' = D \cup \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq n - j + 1\}$,

(iii) $G = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid a_{ii} = 1 \text{ für alle } i\}$,

(iv) $O = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid A \cdot {}^tA = E_n\}$,

(v) Nun sei $K = \mathbb{Q}$. Ist $H = \{A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$?

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

10. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und sei $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots,n} \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeige: die im Sinne der Bruhat-Zerlegung zu A gehörige Permutation ist genau dann durch die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn für alle $m \in \{1, \dots, n-1\}$ die Matrix

$$A_m = \big(a_{ij}\big)_{\substack{i=n-m+1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_m(K)$$

invertierbar ist.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper. Beweise die folgende Variante der Bruhat-Zerlegung: Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt es eine eindeutig bestimmte Permutation $\sigma \in S_n$ und eindeutig bestimmte Matrizen $U \in \mathcal{U}_\sigma$, $B \in \mathcal{B}$ mit $A = BP_\sigma U$.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und seien $i < n$ natürliche Zahlen. Sei σ die Transposition $\tau_{i,i+1} \in S_n$. Zeige, dass die Menge $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}P_\sigma\mathcal{B}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.
(Die Umkehrung ist auch richtig, aber wesentlich schwieriger zu zeigen: Ist $\sigma \in S_n$ derart, dass $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}P_\sigma\mathcal{B}$ eine Untergruppe ist, so hat σ die Form $\tau_{i,i+1}$.)

Aufgabe 4:

(i) Sei K ein Körper, n eine natürliche Zahl, $\sigma \in S_n$. Zeige, dass die Untergruppe $\mathcal{U}_\sigma$ von $\mathrm{GL}_n(K)$ in der Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ enthalten ist.

(ii) Sei K ein Körper. Bezeichne mit τ die Transposition $\tau_{12} \in S_2$. Sei

$$P'_{\mathrm{id}} = E_2,\ P'_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K).$$

Sei $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap \mathrm{SL}_2(K)$. Beweise: Jede Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(K)$ hat eine Darstellung der Form $A = UP'_\sigma B$ mit $\sigma \in S_2$, $U \in \mathcal{U}_\sigma$ und $B \in \mathcal{B}'$. Dabei sind σ, U und B eindeutig bestimmt.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

11. Semesterwoche

Aufgabe 1:

(i) Sei G eine Gruppe, $h \in G$ ein Element. Zeige, dass die Abbildung $c_h : G \to G$, $g \mapsto hgh^{-1}$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Sei K ein Körper und $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Die Abbildung $J : \mathrm{GL}_n(K) \to M_n(K)$ sei definiert durch

$$J(A) = {}^t(A^{-1})\,.$$

Zeige:

(a) $J(A) = ({}^tA)^{-1}$.

(b) $J(A) \in \mathrm{GL}_n(K)$ für alle $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(c) $J \circ J = \mathrm{id}$.

(d) J ist ein Automorphismus von $\mathrm{GL}_n(K)$.

(e) J bildet SL_n bijektiv auf sich ab.

(iii) Zeige, dass die Abbildung $J : \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{SL}_n(K)$ genau dann von der Form c_h mit $h \in \mathrm{SL}_n(K)$ ist, wenn $n = 2$ gilt.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n \in K$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \ldots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & a_2 & \ldots & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_3 & \ldots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i).$$

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bezeichne $E \in M_n(K)$ die Einheitsmatrix. Sei $A \in M_n(K)$ mit $A \cdot {}^tA = E$. Zeige, dass $\det A \in \{1, -1\}$.
Insbesondere gilt für $\sigma \in S_n$: $\det P_\sigma \in \{1, -1\}$.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann
WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

13. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien f und g Endomorphismen von V mit $f \circ f = f$ und $g \circ g = \mathrm{id}_V$.

(i) Bestimme, welche Elemente von K als Eigenwerte von f bzw. g auftreten können.

(ii) Zeige: Die Abbildung f is diagonalisierbar.

(iii) Es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeige, dass dann g diagonalisierbar ist. Zeige, dass die Zusatzbedingung tatsächlich notwendig ist.

Aufgabe 2:
Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$. Zeige:

(i) A hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte $\Leftrightarrow 4 \det A < (\operatorname{tr} A)^2$. In diesem Fall ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

(ii) A hat zwei konjugiert komplex Eigenwerte $\Leftrightarrow 4 \det A > (\operatorname{tr} A)^2$. In diesem Fall ist A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

(iii) A hat einen reellen Eigenwert $\Leftrightarrow 4 \det A = (\operatorname{tr} A)^2$. Ist A in diesem Fall diagonalisierbar?

Aufgabe 3:
Berechne alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $K[X]$ für

(i) $K = \mathbb{F}_2$,

(ii) $K = \mathbb{F}_3$.

Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Präsenzaufgaben, Lineare Algebra I

14. Semesterwoche

Aufgabe 1:
Sei $A \in M_2(K)$ und fasse $M_2(K)$ als K-Vektorraum auf. Wann ist die lineare Abbildung

$$L_A : M_2(K) \longrightarrow M_2(K),\ B \longmapsto AB - BA$$

diagonalisierbar? Wann ist L_A trigonalisierbar?

Aufgabe 2:

(i) Berechne die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

(ii) Wir definieren die Fibonacci-Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $u_1 = u_2 = 1$ und $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ für $n \geq 1$. Für die Matrix A aus Teil (i) gilt also:

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreibe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren und berechne damit $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(iii) Folgere $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\big)$.

Aufgabe 3:
Sei $D : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ die durch $\sum_{i=0}^n a_i X^i \mapsto \sum_{i=1}^n i a_i X^{i-1}$ definierte Abbildung.

(i) Zeige, dass D linear ist und folgere, dass $D(fg) = fD(g) + gD(f)$ für alle $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gilt.

(ii) Bestimme den Kern und das Bild von D.

Sei $M_X : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]$ die durch $f \mapsto X \cdot f$ definierte Abbildung.

(iii) Bestimme sämtliche Eigenwerte von $M_X \circ D$ und $D \circ M_X$.

(iv) Zeige, dass $\mathbb{Q}[X]$ eine Basis aus Eigenvektoren von $M_X \circ D$ bzw. $D \circ M_X$ besitzt.