Prof. Dr. M. Rapoport
E. Hellmann SS 2011

Einführung in die komplexe Analysis

Übungsblatt 5

Abgabe 16.05.2011

Aufgabe 1:
Bestimme für die folgenden holomorphen Funktionen f den Typ der Singularität im Punkt z_0. Bestimme gegebenenfalls die Polordnung, den Hauptteil bzw. bei hebbaren Singularitäten die stetige Fortsetzung von f.

(i) $f(z) = \frac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$, $z_0 = i$,

(ii) $f(z) = \frac{1}{\exp(z)-1}$, $z_0 = 0$,

(iii) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^6}$, $z_0 = 0$,

(iv) $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$, $z_0 = 0$,

(v) $f(z) = \tan(z)$, $z_0 = 0$,

(vi) $f(z) = \sin(\frac{\pi}{z^2+1})$, $z_0 = i$.

Aufgabe 2:
Sei $\epsilon > 0$ und $U_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < z < \epsilon\}$. Zeige, dass die folgenden Abbildungen surjektiv sind.

(i) $f : U_\epsilon \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$,

(ii) $f : U_\epsilon \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$.

Aufgabe 3:

(i) Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : U \to V$ holomorph. Zeige, dass f surjektiv ist, falls f eigentlich ist, d.h. falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset V$ das Urbild $f^{-1}(K) \subset U$ wieder kompakt ist.

(ii) Zeige mittels (i), dass jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

Aufgabe 4:
Sei $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und seien $f, g : \bar{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die keine Nullstelle haben und auf $\mathbb{U}$ holomorph sind. Ferner sei $|f(z)| = |g(z)|$ für alle z mit $|z| = 1$. Zeige, dass $f = cg$ für ein $c \in \mathbb{C}$.