Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

WS 2003/04

Lineare Algebra I

Präsenzaufgaben, Teil 2

Aufgabe 5

Veranschauliche die folgenden Teilräume des $\mathbb{R}^2$ und ihren Durchschnitt, ihre Vereinigung und ihre Summe geometrisch: $U = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\}$, $V = \{a\binom{2}{1};\ a \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 6

a) Ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$?

b) Ist $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 0\}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$?

c) Ist $\mathbb{Q}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}$?

Aufgabe 7

Aufgaben zur vollständigen Induktion, zum Beispiel:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

b) Für alle natürlichen Zahlen a, b, n gilt:

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

c) Jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen enthält ein kleinstes Element. (Dies ist äquivalent zum Prinzip der vollständigen Induktion.)

Aufgabe 8

Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ reelle Zahlen. Es gelte $a_i \neq b_i$ für alle i. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \cdots & + & x_{n+1} & = & 0 \\
b_1x_1 & + & a_1x_2 & + & a_1x_3 & + & a_1x_4 & + & \cdots & + & a_1x_{n+1} & = & 0 \\
b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & a_2x_3 & + & a_2x_4 & + & \cdots & + & a_2x_{n+1} & = & 0 \\
b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & + & a_3x_4 & + & \cdots & + & a_3x_{n+1} & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & = & 0 \\
b_1x_1 & + & b_2x_2 & + & b_3x_3 & + & b_4x_4 & + & \cdots & + & a_nx_{n+1} & = & 0
\end{array}$$

nur die triviale Lösung besitzt.