Einführung in die Algebra — Übungsblatt 14

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Keine Abgabe** – nur zum Spaß und zur Vorbereitung auf die Klausur]

Klausur:

- **Mittwoch, den 14.02.2018 von 9:00 (s.t.!) bis 11:00.**
- Einsicht: Freitag, den 16.02.2018, Nachmittag (Zeit wird noch bekannt gegeben)
- Weitere Informationen zur Klausur auf der Webseite:
  www.math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html

Aufgabe 1. (4 Punkte = 2 + 2)

Seien $a = \sqrt[3]{2}$ und $b = e^{2\pi \mathrm{i}/3}$.
Von der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{Q}(a,b)$ ein Zerfällungskörper von $t^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ ist, und außerdem, dass $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a,b)/\!\!/\mathbb{Q}) \cong S_3$ durch die Wirkung von G auf der Menge $\{a, ab, ab^2\}$.

(a) Zeigen Sie, dass a, ab und ab^2 paarweise algebraisch unabhängig sind.
(b) Beschreiben Sie explizit die Galoiskorrepondenz für die Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(a,b)/\!\!/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. (11 Punkte = 2 + 1 + 1 + 2 + 5)

Seien $f(t) = t^4 - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ und $L/\!\!/\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von $f(t)$ über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, \mathrm{i})$, wobei $\alpha = \sqrt[4]{2}$, und $[\![L : \mathbb{Q}]\!] = 8$.
(b) Konstruieren Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G = \mathrm{Gal}(L/\!\!/\mathbb{Q}) \hookrightarrow S_4$.
(c) Zeigen Sie, dass die Untergruppen $\phi(G)$ und D_4 von S_4 zueinander konjugiert sind. Deshalb gibt es einen Isomorphismus $G \cong D_4$.
(d) Zeigen Sie jetzt, dass es Elemente $\varphi, \psi \in G$ mit $\varphi(\alpha) = \mathrm{i}\alpha$, $\varphi(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$, $\psi(\alpha) = \alpha$ und $\psi(\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ gibt und beschreiben Sie damit *explizit* einen Isomorphismus $G \cong D_4$.
(e) Beschreiben Sie explizit die Galoiskorrespondenz für die Galoiserweiterung $L/\!\!/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. (15 Punkte = 3 + 1 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2)

(a) Bestimmen Sie die irreduziblen Faktoren des Polynoms $t^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[t]$ für $p = 2, 3, 5$.

In dieser Aufgabe werden wir unter anderem zeigen, dass t^4+1 reduzibel über $\mathbb{F}_p$ für alle Primzahlen p ist.

Sei n eine positive ganze Zahl und sei $\Phi_n(t) \in \mathbb{Z}[t]$ das n-te Kreisteilungspolynom, dessen Grad gleich $\varphi(n)$ ist. Sei auch K ein Körper und $r\colon \mathbb{Z} \to K$ der eindeutige Ringhomomorphismus. Wir schreiben $\Phi_n(t) = \sum_i a_i t^i$ und definieren $\hat{\Phi}_n(t) = \sum_i r(a_i) t^i \in K[t]$. Sei L ein Zerfällungskörper von $\hat{\Phi}_n(t)$ über K.

Wir nehmen an, dass $n \neq 0 \in K$, d.h., entweder $\mathrm{char}(K) = 0$ oder $\mathrm{char}(K) = p > 0$ und $p \nmid n$.

Zeigen Sie:

(b) $\hat{\Phi}_n(t)$ hat keine mehrfache Nullstellen in L.
(c) Wenn α eine Nullstelle von $\hat{\Phi}_n(t)$ in L ist, dann ist $\alpha^n = 1$ und $\alpha^m \neq 1$ für alle $0 < m < n$. *Hinweis: angenommen für einen Widerspruch, dass $\alpha^m = 1$ für $m \mid n$ und $m \neq n$. Zeigen Sie, dass α dann eine mehrfache Nullstelle von $t^n - 1$ sein muss, was nicht existieren kann.*
(d) Sei M ein Zerfällungskörper von $t^n - 1$ über L (was deshalb auch ein Zerfällungskörper von $t^n - 1$ über K ist). Zeigen Sie, dass $M = L = K(\alpha)$. Folgern Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $\hat{\Phi}_n(t) \in K[t]$ den Grad $[\![L : K]\!]$ hat.

Seien jetzt $K = \mathbb{F}_p$ und $d = [\![L : \mathbb{F}_p]\!]$. Sei e die Ordnung des Elements $[p]$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

(e) Zeigen Sie, dass $d = e$.
Hinweis: $L^\times$ ist eine zyklische Gruppe.

(f) Deshalb hat $\hat{\Phi}_n(t)$ genau $\varphi(n)/e$ irreduzible Faktoren über $\mathbb{F}_p$. Insbesondere ist dieses Polynom irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ genau dann, wenn $[p]$ ein Erzeuger der Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ist.

(g) Zeigen Sie, dass $\hat{\Phi}_8(t) = t^4 + 1$ und $\hat{\Phi}_{12}(t) = t^4 - t^2 + 1$ reduzibel über $\mathbb{F}_p$ für alle Primzahlen p sind.

Aufgabe 4. (14 Punkte = $14 \cdot 1$) — *Wiederholung* —

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ ist endlich erzeugt.

(b) Wenn G und H zwei Gruppen sind, gibt es auf der Menge $G \times H$ genau eine Struktur einer Gruppe, so dass $g \mapsto (g, 1_H)\colon G \to G \times H$ und $h \mapsto (1_G, h)\colon H \to G \times H$ Gruppenhomomorphismen sind.

(c) Seien m, n positive natürliche Zahlen. Dann ist das Element $\overline{m} = m + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Erzeuger der Gruppe, wenn m und n teilerfremd sind.

(d) Sei G eine Gruppe mit $|G| = 54$. Es gibt genau zwei Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(e) Es gibt eine offensichtliche Operation von S_n auf der Menge aller Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$. Wenn $n \geqslant 2$ hat diese Operation genau einen Fixpunkt.

(f) $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_n]$ ist ein Hauptidealring für jede Zahl $n \geqslant 1$.

(g) Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}]^\times$ hat die Ordnung 2.

(h) Das Polynom $t^5 - 10t^2 + 20 \in \mathbb{Z}[t]$ ist irreduzibel.

(i) Die Untergruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \text{ für eine ganze Zahl } n\} < \mathbb{C}^\times$ ist isomorph zur Quotientengruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(j) $[\![\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\pi\mathrm{i}/4}) : \mathbb{Q}]\!] = 12$.

(k) Sei $L/\!\!/K$ eine endliche Körpererweiterung. Dann kann jeder Körperautomorphismus von K auf L erweitert werden.

(l) Jede endliche Körpererweiterung ist separabel.

(m) Sei $L/\!\!/\mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann gibt es eine weitere Körpererweiterung $M/\!\!/L$, so dass $M/\!\!/\mathbb{Q}$ und $M/\!\!/L$ Galois sind.

(n) Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = 2^r$. Dann hat jedes Element $x \in K$ eine Quadratwurzel, d.h., es gibt $y \in K$, so dass $x = y^2$.