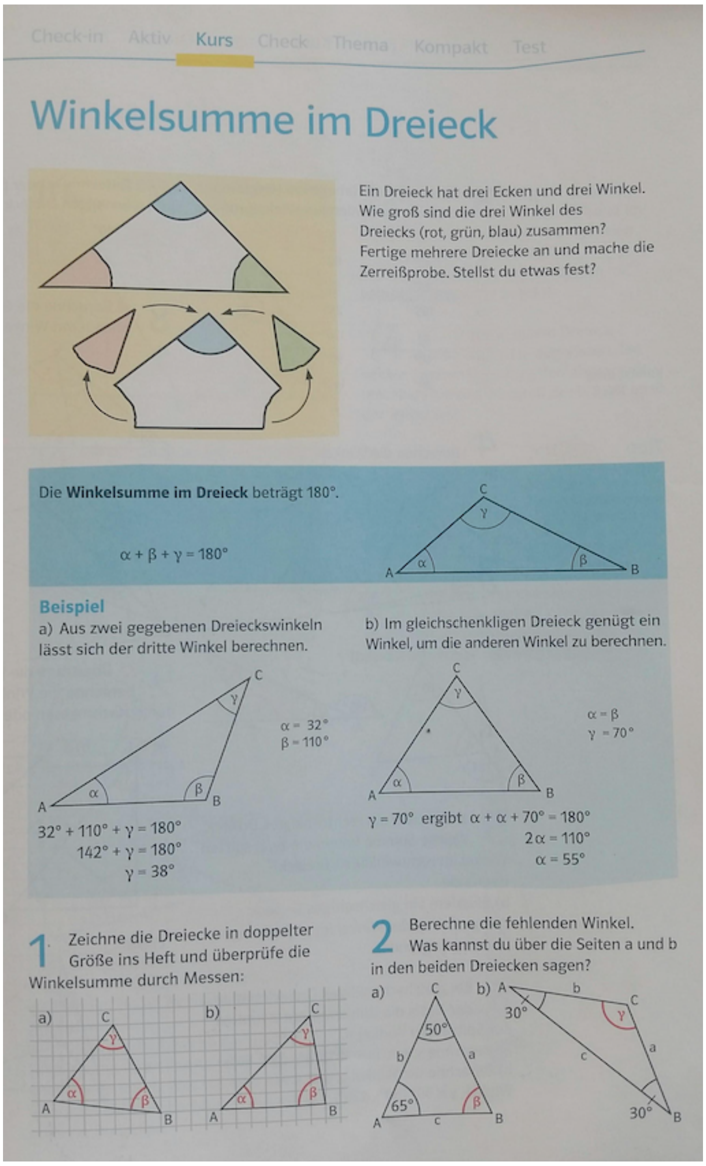
Aus Schulbüchern, wirklich!

Hermann Karcher, Bonn

Voraussetzung: Mathematiker betrachten das logische Folgern aus natürlichen oder hypothetischen Voraussetzungen als ein zentrales Kernstück der Mathematik.
Behauptung: Aus heutigen Schulbüchern zur Mathematik ist dieses Zentralstück weitgehend verschwunden.
Beweis:
25 Jahre nach meinem letzten Blick in ein Schulbuch wurde ich durch die folgende, mir zugeschickte Kopie unerwartet veranlasst, diese Bücher wieder anzusehen.



Check-in Aktiv Kurs Check Thema Kompakt Test

Winkelsumme im Dreieck

Ein Dreieck hat drei Ecken und drei Winkel. Wie groß sind die drei Winkel des Dreiecks (rot, grün, blau) zusammen? Fertige mehrere Dreiecke an und mache die Zerreißprobe. Stellst du etwas fest?

Die **Winkelsumme im Dreieck** beträgt 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Beispiel

a) Aus zwei gegebenen Dreieckswinkeln lässt sich der dritte Winkel berechnen.

$\alpha = 32°$
$\beta = 110°$

$32° + 110° + \gamma = 180°$
$142° + \gamma = 180°$
$\gamma = 38°$

b) Im gleichschenkligen Dreieck genügt ein Winkel, um die anderen Winkel zu berechnen.

$\alpha = \beta$
$\gamma = 70°$

$\gamma = 70°$ ergibt $\alpha + \alpha + 70° = 180°$
$2\alpha = 110°$
$\alpha = 55°$

1 Zeichne die Dreiecke in doppelter Größe ins Heft und überprüfe die Winkelsumme durch Messen:

a) b)

2 Berechne die fehlenden Winkel. Was kannst du über die Seiten a und b in den beiden Dreiecken sagen?

a) $50°$, $65°$ b) $30°$, $30°$

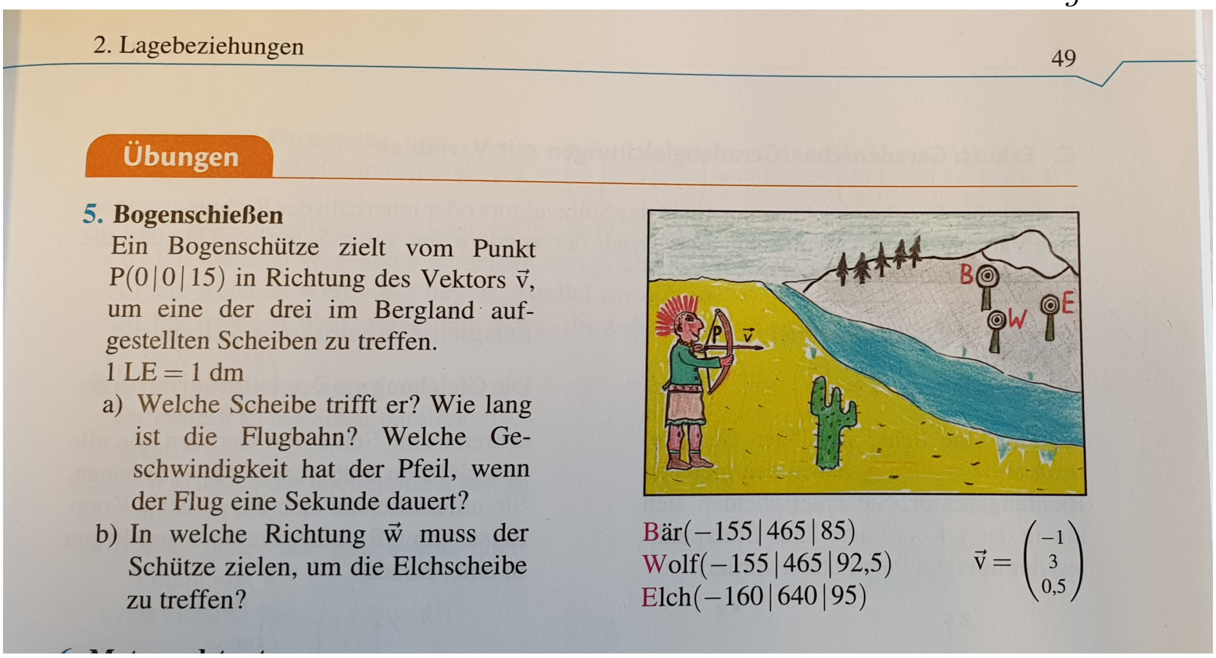
Winkelsumme durch Zerreißen

In Wahrheit geht Mathematik seit über 2000 Jahren anders. Der hier zu sehende vorsätzliche Verzicht auf logische Argumentation und Mitteilung von Sätzen in Form von Rezepten erweist sich als durchgängiges Prinzip. Unnötigerweise, denn man kann die Schülerinnen und Schüler (SuS) mit der Frage: *Kennt ihr Vierecke, deren Winkelsumme ihr angeben könnt?* auf die schon behandelten Rechtecke lenken. Die SuS wissen, dass jede Diagonale ein Rechteck in zwei gleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Daher folgt logisch, dass diese rechtwinkligen Dreiecke die halbe Winkelsumme des Rechtecks haben. Außerdem kann man durch 180°-Drehung um den Mittelpunkt der Hypothenuse jedes rechtwinklige Dreieck zu einem Rechteck verdoppeln. Laut Lehrplan sind sogar Parallelogramme und Stufenwinkel an Parallelen bekannt, sodass das Halbierungsargument am Parallelogramm wiederholt werden kann. Spätestens dann ist ja auch die Parallele zu einer Seite durch die gegenüber liegende Ecke keine fern liegende Hilfslinie mehr, sodass man zur Sicherung den üblichen Beweis (des Euklid) besprechen kann. "Vorsätzlicher Verzicht auf Logik" ist also kein überzogener Vorwurf.

Offensichtlich kann man mit logischem Argumentieren nicht erst in der Sek II anfangen. Dementsprechend ist in der Analysis so wenig an Mathematik übrig, dass dieser Rest weder auf ein MINT-Studium vorbereitet, noch der Allgemeinbildung nützt. Ich möchte aus der Geschichte daran erinnern, dass Archimedes mit der Exhaustionsmethode die Fläche unter Parabeln berechnet und das Verhältnis der Volumina von Halbkugel, Zylinder und Kegel (gleiche Grundkreise und Höhen) bestimmt hat. Demokrit war der Meinung, dass die Materie aus Atomen bestehen müsse, da sich unendliche kleine Teile nicht zu etwas Endlichem zusammensetzen lassen. Vor mehr als 300 Jahren hat Newton mit der Integralrechnung eine andere Antwort als die des Demokrit möglich gemacht. Seine Analysis wurde wichtigstes Werkzeug der theoretischen Physik und der Ingenieurwissenschaften – bis heute. Und Archimedes Methode wurde im 19. Jahrhundert verallgemeinert zu: Wenn man ein Problem mit Cauchyfolgen approximativ (also mit Fehlerschranken, die als Ungleichungen formuliert sind) lösen kann, dann kann man es mit dem Grenzwert dieser Folgen exakt lösen.
In heutigen Schulbüchern zur Analysis werden zwar manche Definitionen, prestigehalber, noch mitgeteilt, benutzt werden sie nie. Stattdessen gibt es unbewiesene *Grenzwertregeln*, mit denen geübt wird, aus einfachen Grenzwerten kompliziertere zu berechnen. Im Zusammenhang mit der Ableitung wird die Technik des *numerischen Differenzierens* empfohlen. Das bedeutet, man berechnet Differenzenquotienten mit "kleiner" Argumentdifferenz h –

aber nicht so klein wie $h = 10^{-20}$. Ich stelle mir vor, jemand hätte dies dem Demokrit auf dem Marktplatz von Athen vorgeschlagen! In Anhang 1 kann man die ebenfalls empfohlene Technik des *graphischen Differenzierens* bewundern. Ungleichungen habe ich nicht entdecken können. Ich habe in den ersten drei Semestern alle Ungleichungen der Analysis auf den Monotoniesatz zurückgeführt. Deshalb kritisiere ich die Darstellung der Schulbücher: *der Monotoniesatz sei anschaulich klar* – offenbar weil die Ableitung in diesem Zusammenhang auch Steigung heißt. Kein Wunder, dass die Exponentialfunktion "rechnerisch" eingeführt wird – ohne dass dabei vorkommt, dass kein Computer der Welt für irgendein rationales Argument den Wert exakt ausrechnen kann (außer $e^0 = 1$). Zu den Regeln der Potenzrechnung wurde auch schon bei 2^x nichts zu irrationalen Argumenten gesagt und bei der Exponentialfunktion noch weniger. Dabei gäbe es die Möglichkeit, aus der mitgeteilten Gleichung $f' = f$ und dem "anschaulich klaren" Monotoniesatz diese Regeln mit zweizeiligen Beweisen herzuleiten.
Ehemalige Studenten meiner Vorlesungen, die mir berichten, auf welche Weise sie mit ihrer Mathematikausbildung Geld verdienen, sagen übereinstimmend: *"Wir können Probleme theoretisch analysieren und das ist schneller, billiger und weniger gefährlich, als die entsprechenden Experimente durchzuführen"*. Welche vorbereitende oder allgemeinbildende Funktion kann ein Analysisunterricht haben, in dem das, was wir seit Newton Analysis nennen, gar nicht mehr vorkommt?

In einem anderen Buch wird die Klasse 13 mit dieser *Anwendung* veralbert:



2. Lagebeziehungen 49

Übungen

5. Bogenschießen
Ein Bogenschütze zielt vom Punkt P(0|0|15) in Richtung des Vektors $\vec{v}$, um eine der drei im Bergland aufgestellten Scheiben zu treffen.
1 LE = 1 dm
a) Welche Scheibe trifft er? Wie lang ist die Flugbahn? Welche Geschwindigkeit hat der Pfeil, wenn der Flug eine Sekunde dauert?
b) In welche Richtung $\vec{w}$ muss der Schütze zielen, um die Elchscheibe zu treffen?

Bär(−155|465|85)
Wolf(−155|465|92,5)
Elch(−160|640|95)
$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

Obwohl schon sehr kleine Kinder wissen, dass Bälle nicht geradeaus fliegen, verlangt die Aufgabe einen geradeaus fliegenden Pfeil. In der angegebenen Sekunde Flugzeit verliert er etwa die Hälfte an Höhe, die das "Bergland" jenseits des Flusses hat. Vergleicht man die Koordinaten der Zielscheiben, so ist "W" senkrecht (!) über "B", aber vor und unterhalb (!) gezeichnet. Entfernungen und Höhen werden in Dezimetern angegeben; das dm ist zweifellos nützlich, weil $1\,\mathrm{dm}^3$ ein Liter ist, aber in geographischen Dokumenten kommen dm nicht vor. Bekanntlich wird in unserer Gesellschaft diskutiert, ob die Geschichten von Pippi Langstrumpf und Jim Knopf politisch korrekt umgeschrieben werden müssen – und ein Mathematikbuch lässt einen Indianer solchen Unsinn machen? Soll wirklich so ein Wissenschaftsbild vermittelt werden? Eine Flugbewegung in Klasse 13, die die Schwerkraft ignoriert, ist eine *Anwendung*?

Noch schlechter geht es der Stochastik. In einem Schulbuch von 2011 wird als Anwendung der Matrixmultiplikation vorgeschlagen, die Abonnentenzahlen von drei Zeitschriften zu betrachten. Es werden Prozentzahlen genannt, nach denen die Abonnenten jeden Monat die Zeitschriften wechseln. Obwohl das in der Wirklichkeit Wahrscheinlichkeiten sind, werden die Abonnentenzahlen mit den angegebenen Verhältnissen verändert, ohne dass es stört, das bald auch Teile von Abonnenten auftreten. Das Wort Wahrscheinlichkeit fällt zwar erst im nächsten Kapitel des Buches, aber mehrere Jahre später ist fast dieselbe Situation in einer Lehrprobe zur Stochastik mit "gut" bewertet worden. Das Problem wird also so behandelt, als erwarteten wir wirklich beim nächsten Wurf mit einem Würfel, den Erwartungswert 3,5 (der *zufälligen* Augenzahl) zu werfen. *Anwendungen* müssen eben sein, egal wie weit sie an den Haaren herbeigezogen sind.

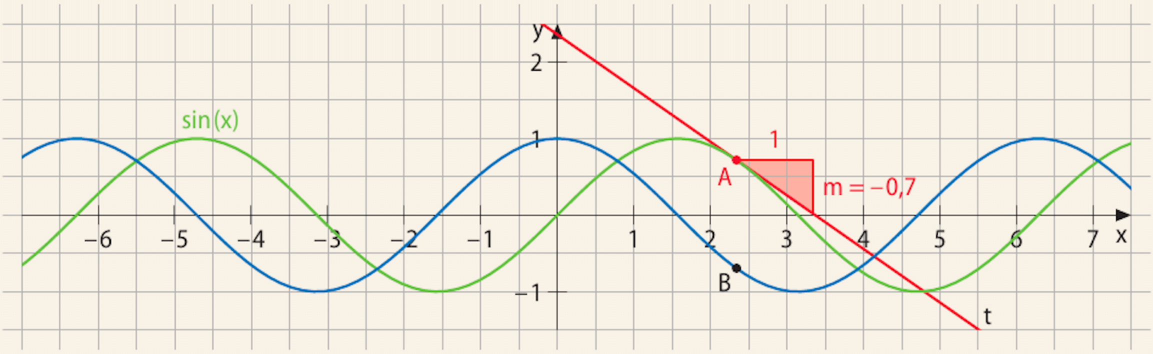
Nochmal zur Sekundarstufe I. Dass in den Medien viel mehr falsche Zahlenangaben als Rechtschreibfehler vorkommen, liegt daran, dass die Korrekturprogramme Zahlenangaben nicht prüfen können. Deshalb wird man doch ein gutes Verständnis unseres Zahlsystems für ein wichtiges Unterrichtsziel halten. Der Beweis der Quersummenregeln für die Teilbarkeit durch 3 und 9 argumentiert ausdrücklich mit der *Position der Ziffern.* Warum kann ich dieses Argument in keinem Schulbuch mehr finden? Weil der Taschenrechner die Bruchrechnung zurückgedrängt und Teilbarkeitsregeln überflüssig gemacht hat? Zum Preis der Orientierungslosigkeit im Zahlenraum? Und ist es wirklich hilfreich, dass Primzahlen und Argumente mit ihnen auch nicht mehr zu finden sind? Faktorisiert man $2 \cdot 5 \pm 1$, so wird Euklids Beweisidee schon nahe gelegt, wie er zu jeder endlichen Menge von Primzahlen weitere konstruiert. Die Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung wurde auch 1976 in Schulbüchern nicht thematisiert, vermutlich, weil der Weg über Euklids Division mit Rest und die Darstellung des größten gemeinsamen Teilers als Linearkombination, $\mathrm{ggT}(a,b) = m \cdot a + n \cdot b,\ m,n \in \mathbb{Z}$, als zu lang erscheint. Deshalb füge ich als Anhang 2 einen Beweis mit Artins *Prinzip vom kleinsten Verbrecher* an, nicht als Vorschlag für die Schule sondern als Beispiel für Argumente, die unseren Schülern nicht mehr zugetraut werden.

Ich war 1976 an einer Stellungnahme der DMV beteiligt. Stellen Sie sich bitte nicht vor, dass solche Texte mal einfach an einem Nachmittag entstehen, sie bedeuten erhebliche Arbeit für die beauftragten Vertreter. Leider ist es dann für die Adressaten ziemlich einfach, solche Stellungnahmen abzuheften. Eine Änderung der Schulbuchmisere wird nicht durch Stellungnahmen der DMV erreicht. Ich bitte **alle** Kolleginnen und Kollegen, die Anfängervorlesungen halten, die mit Lehrerausbildung zu tun haben oder die Schulkinder in ihrer Verwandtschaft haben: Sehen Sie sich Schulbücher an! Wenn die Mathematiker **insgesamt** sich nicht gegen die Degeneration der Mathematik auf der Schule wehren, dann geht es eben weiter bergab. Noch einmal: *Bitte sehen Sie sich Schulbücher an! Es ist dringend, dass mathematische Inhalte und logische Argumentationen wieder ernst genommen werden.*

Anhang 1. So lehrt man heute die Ableitung von sin, bunt und ohne Herleitung aus Definitionen, eben "graphisch":

Merke

Durch Betrachten der Tangentensteigungen des Graphen der Sinusfunktion (graphisches Differenzieren) erhält man folgenden Zusammenhang:



Für $f(x) = \sin(x)$ gilt: $f'(x) = \cos(x)$. Für $g(x) = \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$.

Anhang 2. So viel Logik ist zu viel:
Falls die Primzahlzerlegung in $\mathbb{N}$ nicht eindeutig ist, so gibt es eine *kleinste* Zahl $n \in \mathbb{N}$, die auf zwei verschiedene Weisen Produkt von Primzahlen ist:

$$n = p_1 \cdot ... \cdot p_r = q_1 \cdot ... \cdot q_s.$$

Weil n das kleinste solche Beispiel ist, sind alle p_j von allen q_k verschieden. Außerdem können wir annehmen, dass p_1 das kleinste der p_j und q_1 das kleinste der q_k ist. Wegen $p_1 \neq q_1$ auch: $p_1 + 1 \leq q_1 \leq \sqrt{n}$.
Nach diesen Vorbereitungen konstruieren wir eine Zahl m, $\sqrt{n} < m < n$, für die wir mit Hilfe der beiden Zerlegungen von n zwei *verschiedene* Produktdarstellungen angeben können: $m := n - p_1 q_1 < n$. Aber m besitzt nach Wahl von n eine *eindeutige* Zerlegung in Primfaktoren. Daher folgt aus

$$m = p_1 \cdot (p_2 \cdot ... \cdot p_r - q_1) = q_1 \cdot (q_2 \cdot ... \cdot q_s - p_1)$$

dass p_1 ein Faktor von $(q_2 \cdot ... \cdot q_s - p_1)$ sein muss, also auch ein Faktor von $q_2 \cdot ... \cdot q_s < n$. Für Zahlen $< n$ ist die Faktorisierung eindeutig, also stimmt p_1 mit einem der q_k, $k > 1$ überein - im Widerspruch dazu, dass p_1 von allen q_k verschieden ist. Daher kann es das kleinste Gegenbeispiel n nicht geben.

Lesen Sie bitte auch, was andere Kolleginnen und Kollegen zu diesem Thema schreiben, 12 Links auf meiner Homepage:
https://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/
(Sonar, Schwenk, Wittmann, Lemmermeyer, Remus-Walcher,
Kaenders-Weiss, Lesch, Kühnel, Henze, Wagner, Brandbrief, Studentin)

Wie ich mit Studierenden über Analysis geredet habe:
Karcher, H. (2002, 2011) Analysis with Uniform Error Bounds 17 - 121.
https://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/AnalysisUniformly.pdf