Übungsaufgaben zur Einführung in die Komplexe Analysis

Prof. Dr. C.-F. Bödigheimer

Sommersemester 2014

Blatt 2 Abgabetermin : Mittwoch, 23.04.2014

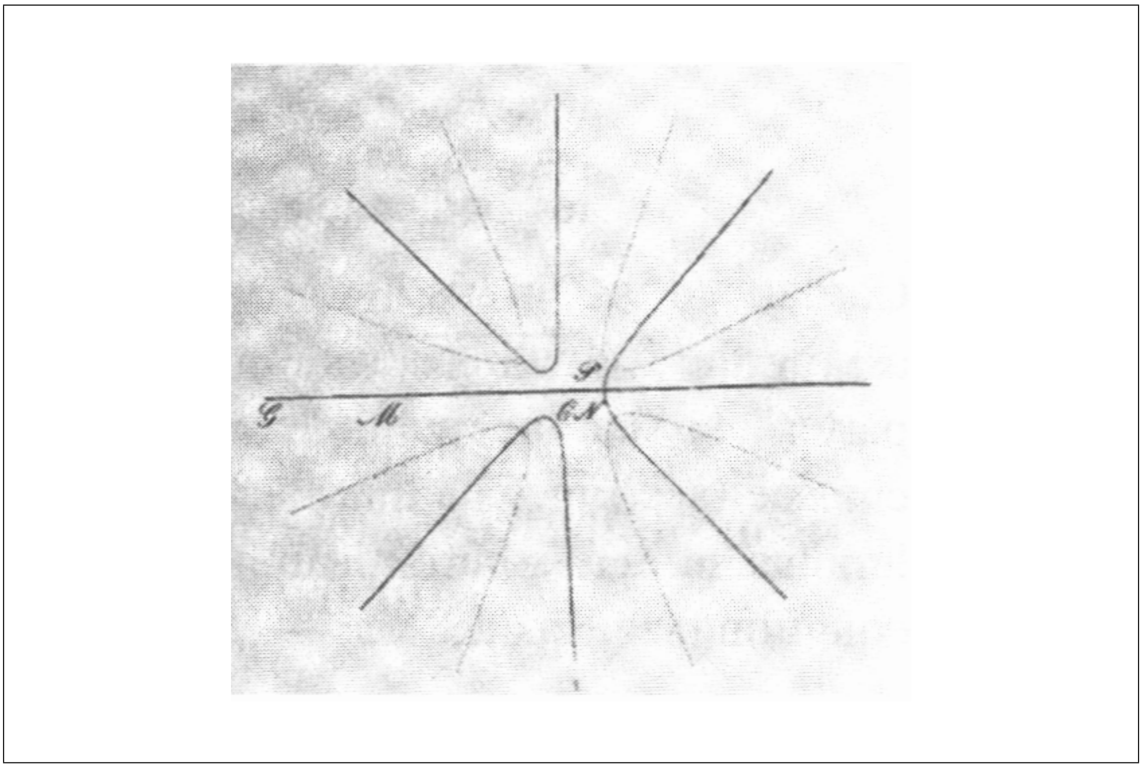

Abbildung 1: Niveaulinienzeichnung der Abbildung $z \mapsto z^3$ aus Gauß' Dissertation „ Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.“ Helmstedt 1799. (Gauß, Werke Bd. 3, Seite 1 - 131)

Aufgabe 1 (Konjugierte Nullstellen)
Es sei

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

ein Polynom mit reellen Koeffizienten a_i. Beweise die folgende Äquivalenz:

$$P(\rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{\rho}) = 0.$$

Aufgabe 2 (Niveaulinien komplexwertiger Funktionen)
Beschreibe Real- und Imaginärteil der Funktionen $z \mapsto z^2$ und $z \mapsto \frac{1}{z}$. Zeichne Niveaulinienbilder.

Aufgabe 3 (Real- und Imaginärteil quadratischer Polynome)
Für welche Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das Polynom $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ Real- oder Imaginärteil eines komplexen Polynoms $Az^2 + Bz + C$? Ist x^2 Realteil eines komplexen Polynoms?

Aufgabe 4 (Betrag der Exponentialabbildung)
Zeige, dass

$$|e^z| = e^{\Re(z)}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

***-Aufgabe 5** (Der Sinus im Komplexen)
Zeige, dass

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

den Streifen $|\Re(z)| < \pi/2$ vereinigt mit den Halbgraden $\Re(z) = \pi/2$, $\Im(z) \geq 0$ und $\Re(z) = -\pi/2$, $\Im(z) \leq 0$ bijektiv auf $\mathbb{C}$ abbildet.

Man kann sich das Verhalten komplexwertiger Funktionen veranschaulichen, indem man das Bild von Gitterlinien zeichnet. In *Mathematica* lässt sich das z.B. wie folgt bewerkstelligen:

```
In[1]:= << Graphics`ComplexMap`;

General::obspkg :
  Graphics`ComplexMap` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current
    Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. >>

In[2]:= CartesianMap[Sin, {-Pi / 2, Pi / 2, Pi / 10}, {-Pi / 2, Pi / 2, Pi / 10}]
```

Out[2]=