

Die Blätterungskohomologie von Knotenblätterungen der Sphären

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Sarah Maria Maßberg

aus München

März 2008

Aus dem Mathematischen Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Gedruckt mit der Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. W. Singhof

Koreferent: Prof. Dr. H. Reich

Tag der mündlichen Prüfung: 28.05.2008

Zusammenfassung

Eine Blätterung \mathcal{F} der Kodimension q einer n -Mannigfaltigkeit M ist eine Zerlegung der Mannigfaltigkeit in immersierte, disjunkte, zusammenhängende $(n - q)$ -Untermannigfaltigkeiten, die lokal wie eine Zerlegung von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ in die Untermannigfaltigkeiten $\mathbb{R}^{n-q} \times \{y\}$ für alle $y \in \mathbb{R}^q$ aussieht. Die Elemente einer solchen Zerlegung \mathcal{F} heißen auch Blätter von \mathcal{F} und (M, \mathcal{F}) ist eine geblätterte Mannigfaltigkeit.

Nach dieser Definition ist keineswegs offensichtlich, welche Mannigfaltigkeiten in welchen Dimensionen überhaupt Blätterungen besitzen. Für alle Sphären ungerader Dimension kann die Frage nach der Existenz von (Kodimension 1)-Blätterungen allerdings positiv beantwortet werden, indem man die berühmte Reebblätterung der \mathbb{S}^3 auf höhere Dimensionen verallgemeinert. Dazu sei $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ ein sogenannter gefasertes Knoten, also eine eingebettete, kompakte, zusammenhängende $(2n - 1)$ -Untermannigfaltigkeit der $(2n + 1)$ -Sphäre, deren Komplement ein Faserbündel über der \mathbb{S}^1 ist, welches in einer Tubenumgebung $T(K)$ von K trivial ist. Auf $C := \overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)}$ lässt sich unter diesen Voraussetzungen eine (Kodimension 1)-Blätterung konstruieren, die den Rand $\partial C = \partial T(K)$ selbst als Blatt hat. Existiert zusätzlich auf $T(K)$ eine ebensolche Blätterung, dann kann man beide Blätterungen über den gemeinsamen Rand zu einer sogenannten Knotenblätterung \mathcal{K} der \mathbb{S}^{2n+1} verkleben. Dieses Resultat von Lawson und Durfee soll in Kapitel 1 aufbereitet werden.

Die Blätterungskohomologie $H^*(M, \mathcal{F})$ einer geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) ist eine Abwandlung der deRham-Kohomologie von M , wobei Differentialformen und Differential nur entlang der Blätter von \mathcal{F} gebildet werden. Im Vergleich zur deRham-Kohomologie besitzt die Blätterungskohomologie eine wesentlich komplexere Struktur, da z.B. die einzelnen Kohomologieräume nicht mehr endlichdimensional sein müssen.

In Kapitel 2 werden einige wichtige Resultate zur deRham-Kohomologie, insbesondere der Satz von Mayer-Vietoris, auf den geblätterten Fall verallgemeinert und für Kohomologieberechnungen auf $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ herangezogen. Da nach der Definition von Knotenblätterungen nur auf dem Komplement der Knotentube eine explizite Beschreibung der Blätterung bekannt ist, müssen alle angestrebten Aussagen über $H^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ aus der Kohomologie dieses geblätterten Unterraums $(C, \mathcal{K}|_C)$ gefolgert werden. In der Frage der Dimensionen der Blätterungskohomologieräume als entscheidendem Merkmal ihrer Vektorraumstruktur kommt man so zu dem Ergebnis, dass in allen Graden k , so dass $H^{k-1}(K)$ nicht trivial ist, die Kohomologie $H^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ unendlichdimensional ist.

Abstract

A foliation \mathcal{F} of codimension q of an n -manifold M is a decomposition of the manifold into immersed, disjoint, connected $(n - q)$ -submanifolds that locally looks like a decomposition of $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$ into the submanifolds $\mathbb{R}^{n-q} \times \{y\}$ for all $y \in \mathbb{R}^q$. The elements of such a decomposition \mathcal{F} are called leaves of \mathcal{F} and (M, \mathcal{F}) is a foliated manifold.

According to this definition, it is not at all evident which manifolds have foliations in which dimensions. But for all spheres in odd dimensions, the question of existence of codimension 1 foliations can be answered positively by a generalization of the famous Reeb foliation of \mathbb{S}^3 to higher dimensions. For this let $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ be a so-called fibered knot, i.e. an embedded, compact, connected $(2n - 1)$ -submanifold of the $(2n + 1)$ -sphere, whose complement is a fiber bundle over \mathbb{S}^1 that is trivial in a tubular neighborhood $T(K)$ of K . Under these assumptions, one can construct a codimension 1 foliation of $C := \overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)}$ that has the boundary $\partial C = \partial T(K)$ itself as a leaf. If, in addition, there exists such a kind of foliation also on $T(K)$, then both foliations can be glued together along the common boundary to a so-called knot foliation \mathcal{K} of \mathbb{S}^{2n+1} . This result of Lawson and Durfee is retraced in chapter 1.

The foliation cohomology $H^*(M, \mathcal{F})$ of a foliated manifold (M, \mathcal{F}) is a modification of the deRham cohomology of M where the differential forms and the differential are only built up along the leaves of \mathcal{F} . In comparison to the deRham cohomology, the foliation cohomology has a much more complex structure, for example the cohomology spaces no longer have to be finite dimensional.

In chapter 2 some important results about the deRham cohomology, in particular the Mayer-Vietoris theorem, will be generalized to the foliated case and used for cohomology computations on $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$. According to the definition of knot foliations, an explicit description of the foliation is only available on the complement of the knot tube, therefore all desired statements about $H^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ must be concluded from the cohomology of this foliated subspace $(C, \mathcal{K}|_C)$. As for the question of the dimensions of the foliation cohomology spaces as an important characteristic of their vector space structure, this leads to the result that in all degrees k , such that $H^{k-1}(K)$ is non-trivial, the cohomology $H^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ is infinite dimensional.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Knotenblätterungen der Sphären	5
1.1 Tangentiale Verklebung von Blätterungen	8
1.2 Gefaserte Knoten und Knotenblätterungen	13
1.3 Existenz von Knotenblätterungen	16
2 Kohomologie der Knotenblätterungen	19
2.1 Technische Vorbereitungen	22
2.2 Kohomologie von $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$	26
2.3 Kohomologie von $(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$	28
2.4 Kohomologie von (N, \mathcal{K}_C^{sp})	30
2.5 Mayer-Vietoris-Sequenz	42
2.6 Dimensionen der Kohomologieräume	44
Literaturverzeichnis	53

Einleitung

Sphären gehören zu den einfachsten und zugleich zu den interessantesten Objekten der Mathematik und in vielen Bereichen liefern sie wichtige Beispiele und Spezialfälle. Die geometrischen, analytischen und topologischen Eigenschaften der Sphären sind sehr gut verstanden und weitgehend bekannt, auch wenn einige Fragestellungen (wie zum Beispiel der Beweis der Poincaré-Vermutung) die mathematische Welt jahrzehntelang beschäftigt haben.

Allerdings ist eine Vielzahl von Konstruktionen aus der Topologie für Sphären auch unspektakulär, wie zum Beispiel die deRham-Kohomologie

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k = 1, \dots, n-1 \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Eine Möglichkeit, die globale Struktur anzureichern, ist die Definition von Blätterungen der Sphären. Eine (Kodimension q)-Blätterung ist dabei eine Zerlegung der Sphäre in disjunkte zusammenhängende Untermannigfaltigkeiten – die Blätter der Blätterung – mit der Eigenschaft, dass in einer Umgebung um jeden Punkt der Sphäre lokale Koordinaten (x_1, \dots, x_n) existieren, die die Blätter durch die Gleichungen $x_{n-q+1} = \text{konstant}, \dots, x_n = \text{konstant}$ charakterisieren.

Eines der ersten nichttrivialen Beispiele für geblätterte Sphären lieferte Georges Reeb im Jahr 1944 mit einer (Kodimension 1)-Blätterung der 3-Sphäre [8, 18]. Diese sogenannte Reebblätterung wird wie folgt konstruiert (siehe Abbildung):

Man betrachtet zunächst die Blätterung des unendlichen Streifens $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ durch die beiden Streifenränder $\mathbb{R} \times \{-1\}$ und $\mathbb{R} \times \{1\}$ und achsensymmetrische Kurven, die sich im Unendlichen asymptotisch den Streifenrändern annähern. Rotiert man diesen geblätterten Streifen um die Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$, so erhält man eine Blätterung des unendlichen Zylinders $\mathbb{R} \times \mathbb{D}^2$. Da diese Blätterung durch die Translation $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ erhalten wird, kann der geblätterte Zylinder durch die Identifikation $(x, y) \sim (x + 1, y)$ zu einem geblätterten Volltorus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ geschlossen werden, der als Untermannigfaltigkeit

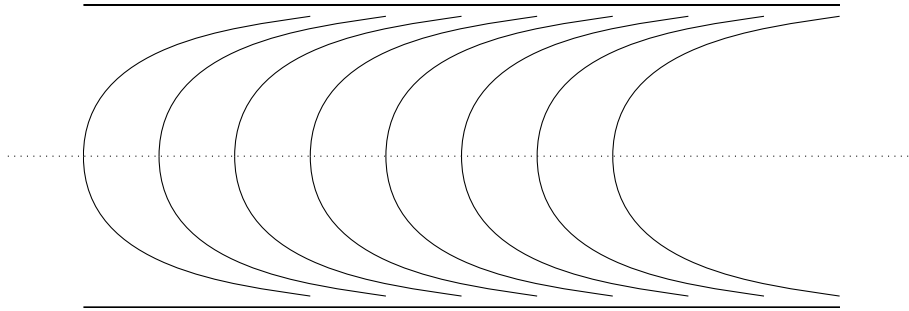


Abbildung: Die Reebblätterung auf dem Streifen $\mathbb{R} \times [-1, 1]$.

in die \mathbb{S}^3 eingebettet wird. Blättert man jetzt das abgeschlossene Komplement von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ in \mathbb{S}^3 – wieder ein Volltorus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ – auf die gleiche Weise, so ist das Ergebnis die Reebblätterung der 3-Sphäre.

Danach war es nur natürlich, nach der Existenz von (Kodimension 1)-Blätterungen für Sphären höherer Dimension zu fragen. Doch zunächst konnten für ungefähr 25 Jahre keine größeren Fortschritte in der Beantwortung dieser Frage erzielt werden. Erst Anfang der 1970er Jahre gelang es unter anderen Lawson und Durfee, die Konstruktion der Reebblätterung der \mathbb{S}^3 auf alle Sphären ungerader Dimension zu verallgemeinern [12, 6, 7]. Die Existenzfrage war damit gelöst, denn nach einem Ergebnis von Thomas kann es (Kodimension 1)-Blätterungen nur auf Mannigfaltigkeiten mit Eulercharakteristik 0 geben [21].

Lawson und Durfee nutzten für ihren Beweis sogenannte gefaserte Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$, kompakte zusammenhängende $(2n - 1)$ -Untermannigfaltigkeiten der $(2n + 1)$ -Sphäre, deren Komplemente über der \mathbb{S}^1 fasern, in einer Tubenumgebung $T(K)$ von K sogar trivial. Auf dem abgeschlossenen Komplement von $T(K)$ induziert das eingeschränkte Faserbündel eine Blätterung, die entlang des Randes „eingedreht“ und mit einer geeigneten Blätterung von $T(K)$ über den gemeinsamen Rand $\partial T(K)$ verklebt werden kann.

Auf diese Weise entstandene Blätterungen der Sphären nennt man auch Knotenblätterungen. Die vielen Freiheiten in der Konstruktion – soweit möglich Wahl des Knotens, der Faserung, des Eindrehens, der Knotentubenblätterung – machen die Knotenblätterungen zu einer großen und vielfältigen Klasse von (Kodimension 1)-Blätterungen der Sphären, die sich in gewisser Hinsicht sogar als universell herausstellen könnte.

Novikov hat nämlich in seinem berühmten “closed leaf theorem” bewiesen, dass jede (Kodimension 1)-Blätterung der \mathbb{S}^3 eine Reebkomponente besitzt, d.h. einen Volltorus mit einer Reebblätterung wie oben beschrieben [17]. Der

erste Teil seines Beweises zeigt die Existenz eines sogenannten “vanishing cycle”, der zweite Teil beweist, dass jeder “vanishing cycle” auf dem Rand einer Reebkomponente liegt.

Zumindest der zweite Teil konnte bisher auch auf Sphären höherer Dimension verallgemeinert werden, indem bewiesen wurde, dass bei Existenz eines verallgemeinerten “vanishing cycle” dieser auf dem Rand einer verallgemeinerten Reebkomponente liegt, wie sie das abgeschlossene Knotentubenkomplement eines gefaserten Knotens mit der oben beschriebenen eingedrehten Blätterung darstellt [5].

Zur Untersuchung von Knotenblätterungen kann man wieder die verschiedensten Instrumente aus Geometrie, Analysis und Topologie anwenden, um die Zusatzstruktur gewinnbringend zu nutzen. Ein wichtiges topologisches Instrument ist dabei die sogenannte Blätterungskohomologie, eine Abwandlung der deRham-Kohomologie für geblätterte Mannigfaltigkeiten, bei der Differentialformen und Differential nur längs der Blätter betrachtet werden. Trotz dieser Einschränkung des zugrunde liegenden Kettenkomplexes bleiben die wichtigsten Eigenschaften der deRham-Kohomologie wie der Satz von Mayer-Vietoris, die Künneth-Formel und eine Verallgemeinerung des Leray-Hirsch-Theorems auch in der Blätterungskohomologie gültig, was an den entsprechenden Stellen bewiesen wird.

Die Endlichdimensionalität der deRham-Kohomologie gilt dagegen in der Blätterungskohomologie nicht mehr, was zu einer wesentlich reicheren Vektorraumstruktur führt. Im Gegensatz zur oben angegebenen deRham-Kohomologie der Sphären wird für die Blätterungskohomologie der knotengeblätterten Sphären dementsprechend auch ein deutlich interessanteres Ergebnis am Ende stehen.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit wird auf der Dimension der Kohomologieräume als charakterisierendem Merkmal für die Vektorraumstruktur der Blätterungskohomologie liegen und das Hauptresultat ist der

Satz Gegeben sei eine Knotenblätterung der \mathbb{S}^{2n+1} zu dem gefaserten Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$. Für alle $0 \leq k \leq 2n$ mit $H^{k-1}(K) \neq 0$ ist die Dimension der Blätterungskohomologie der knotengeblätterten Sphäre im Grad k unendlich.

Um zu dieser Aussage zu kommen, wird zunächst die Blätterungskohomologie des abgeschlossenen Knotentubenkomplements $\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)}$ durch mehrere Mayer-Vietoris-Zerlegungen berechnet.

Mit Hilfe von zwei weiteren Abwandlungen der Blätterungskohomologie wird eine Möglichkeit geschaffen, daraus Rückschlüsse auf die Blätterungskohomologie der Sphäre \mathbb{S}^{2n+1} zu ziehen.

Schließlich wird bewiesen, dass ein bestimmter Quotient eines Funktionenraumes, der als Kohomologiesummand auftreten kann, unendlichdimensional ist und diese Eigenschaft zum Hauptresultat führt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Singhof für die Betreuung dieser Arbeit, seine ständige Diskussionsbereitschaft und insbesondere seine Hilfe beim letzten Beweisschritt des Hauptsatzes bedanken.

Außerdem danke ich allen, die Teile meines Textes Korrektur gelesen haben und meinem Mann Jens für seine vielfältige Hilfe und liebevolle Unterstützung besonders in der letzten Phase dieser Arbeit. Und nicht zuletzt danke ich meinem kleinen Sohn Valentin dafür, dass er mich immer wieder vom Arbeiten abgehalten hat, um mir die anderen wichtigen Dinge des Lebens zu zeigen.

Kapitel 1

Knotenblätterungen der Sphären

Die Frage nach der Existenz von (Kodimension 1)-Blätterungen der Sphären war lange Zeit ein wichtiges offenes Problem in der Theorie der Blätterungen. Grundsätzlich muss diese Frage für Sphären gerader Dimension negativ beantwortet werden, da Mannigfaltigkeiten mit Eulercharakteristik ungleich 0 keine (Kodimension 1)-Blätterungen besitzen können [21]. Für die S^3 als kleinste nichttriviale Sphäre ungerader Dimension hat Reeb die Konstruktion einer (Kodimension 1)-Blätterung beschrieben [8, 18], die er aus den (Kodimension 1)-Blätterungen zweier Volltori zusammengesetzt hat. Durch eine Verallgemeinerung dieser Konstruktion auf höhere Dimensionen mit Hilfe sogenannter gefaserner Knoten und der Identifikation spezieller Hyperebenen-singularitäten konnten Lawson und Durfee die Existenzfrage für alle Sphären ungerader Dimension positiv beantworten [12, 6, 7].

In diesem Kapitel soll das Resultat von Lawson und Durfee und die dabei involvierten Definitionen und Konstruktionen von gefaserten Knoten und Knotenblätterungen nachvollzogen werden.

Um die nötigen Begriffe und Bezeichnungen dafür zur Verfügung zu stellen, müssen kurz die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Blätterungen wiederholt werden.

Zunächst werden nur Mannigfaltigkeiten ohne Rand betrachtet.

1.0.1 Definition Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\mathcal{F} = \{L_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ eine Zerlegung von M in disjunkte, zusammenhängende, immersierte Untermannigfaltigkeiten der Dimension $p = n - q$ für $0 \leq q \leq n$. \mathcal{F} heißt C^r -Blätterung der Kodimension q (bzw. der Dimension p) auf M mit $0 \leq r \leq \infty$, wenn M einen C^r -Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ mit Karten

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

besitzt, so dass für alle $\lambda \in \mathcal{L}$ und alle $\alpha \in \mathcal{A}$ gilt, dass jede Zusammenhangskomponente von $L_\lambda \cap U_\alpha$ die Form $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{y\})$ für ein $y \in \mathbb{R}^q$ hat. Jede Untermannigfaltigkeit $L_\lambda \in \mathcal{F}$ nennt man dann ein Blatt der Blätterung \mathcal{F} und das Paar (M, \mathcal{F}) heißt geblätterte Mannigfaltigkeit.

1.0.2 Beispiel Die beiden trivialen Extremfälle für geblätterte Mannigfaltigkeiten sind die Folgenden:

- (a) Sei M eine zusammenhängende glatte n -Mannigfaltigkeit. Die Zerlegung $\{M\}$ von M ist dann die eindeutige C^∞ -Blätterung der Kodimension 0 auf M und die geblätterte Mannigfaltigkeit wird mit (M, M) oder einfach nur mit M bezeichnet.
- (b) Auf der glatten n -Mannigfaltigkeit M sei die Zerlegung $\{\{x\}\}_{x \in M}$ von M in die Punkte von M gegeben. Diese definiert auf M die eindeutige C^∞ -Blätterung der Kodimension n , die mit \mathcal{F}_0^M bezeichnet wird.

Will man mit Abbildungen zwischen geblätterten Mannigfaltigkeiten arbeiten, sollten diese kategoriell sein, also die gerade definierte zusätzliche Struktur auf den Mannigfaltigkeiten erhalten.

1.0.3 Definition Sei (M_1, \mathcal{F}_1) eine geblätterte Mannigfaltigkeit mit einer C^{r_1} -Blätterung der Kodimension q_1 und (M_2, \mathcal{F}_2) eine geblätterte Mannigfaltigkeit mit einer C^{r_2} -Blätterung der Kodimension q_2 . Es bezeichne r das Minimum aus r_1 und r_2 . Eine C^r -Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt geblätterte Abbildung, falls es für jedes Blatt $L_1 \in \mathcal{F}_1$ ein Blatt $L_2 \in \mathcal{F}_2$ gibt mit

$$f(L_1) \subset L_2.$$

1.0.4 Bemerkung Falls eine geblätterte Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) gegeben ist, so wird auf jeder offenen Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ eine Blätterung $\mathcal{F}|_N$ induziert, deren Blätter die Zusammenhangskomponenten der Durchschnitte von N mit den Blättern von \mathcal{F} sind. Die Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ ist dann automatisch eine geblätterte Abbildung.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von Untermannigfaltigkeiten im Zusammenhang mit Blätterungen ist die Transversalität:

1.0.5 Definition Sei (M, \mathcal{F}) eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer C^r -Blätterung der Kodimension q und $r \geq 1$. Eine Transversale $S \subset M$ zu \mathcal{F} ist eine Einbettung einer zusammenhängenden q -Mannigfaltigkeit S in M , die in jedem Punkt transversal zu \mathcal{F} ist, d.h. für alle $x \in S$ ist

$$T_x(S) \cap T_x(L_x) = \{0\},$$

falls L_x das (eindeutige) Blatt von \mathcal{F} mit $x \in L_x$ bezeichnet.

Schneidet S jedes Blatt von \mathcal{F} , dann nennt man S eine totale Transversale zu \mathcal{F} .

Sollen nun auch glatte Mannigfaltigkeiten M mit Rand berücksichtigt werden, lässt sich das oben Gesagte durch die Modellierung von ∂M mit Halbräumen $\mathbb{R}_+^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \geq 0\}$ verallgemeinern:

In einem zu einer Blätterung \mathcal{F} assoziierten Atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ werden jetzt zusätzlich Karten der Form

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q$$

oder

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$$

auftreten, falls $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$.

Im ersten Fall besteht der Rand ∂U_α der Kartenumgebung aus den lokalen Blättern $\varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{(0, y')\})$ mit $y' \in \mathbb{R}^{q-1}$, während im zweiten Fall ∂U_α die lokalen Blätter in den Teilmengen $\varphi_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-1} \times \{y\})$ mit $y \in \mathbb{R}^q$ transversal schneidet.

Global zusammengesetzt ist also zu einer bestimmten Blätterung \mathcal{F} auf M jede Zusammenhangskomponente des Randes ∂M von M immer entweder selbst eine Vereinigung von Blättern von \mathcal{F} oder sie hat einen transversalen Schnitt mit den Blättern von \mathcal{F} .

1.0.6 Definition Sei (M, \mathcal{F}) eine geblätterte Mannigfaltigkeit (mit Rand) und sei $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ein assoziierter Atlas. Der tangentielle Rand von M ist dann definiert als

$$\partial_\tau M = \bigcup_{\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^q} \varphi_\alpha^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\} \times \mathbb{R}^{q-1})$$

und der transversale Rand von M ist

$$\partial_{\text{h}} M = \bigcup_{\varphi_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q} \varphi_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{p-1} \times \mathbb{R}^q).$$

1.0.7 Bemerkung Eine C^r -Blätterung \mathcal{F} der Kodimension q auf M induziert auf $\partial_{\text{h}} M$ eine C^r -Blätterung $\mathcal{F}|_{\partial_{\text{h}} M}$ der Kodimension q und auf $\partial_\tau M$ eine C^r -Blätterung $\mathcal{F}|_{\partial_\tau M}$ der Kodimension $q-1$. Die Blätter dieser induzierten Blätterungen sind die Zusammenhangskomponenten der Durchschnitte $L \cap \partial_{\text{h}} M$ bzw. $L \cap \partial_\tau M$ für alle $L \in \mathcal{F}$.

Einige wichtige Konstruktionsmöglichkeiten für Blätterungen, die im Weiteren Verwendung finden, sollen hier noch kurz angegeben werden.

1.0.8 Beispiel

- (a) Gegeben seien eine glatte n -Mannigfaltigkeit M mit einer C^r -Blätterung $\mathcal{F} = \{L_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ der Kodimension q und eine glatte m -Mannigfaltigkeit X ohne Rand. Durch $\mathcal{F} \times X := \{L_\lambda \times X\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ wird auf $M \times X$ eine C^r -Blätterung der Kodimension q definiert mit $\partial_\tau(M \times X) = (\partial_\tau M) \times X$ und $\partial_{\mathfrak{h}}(M \times X) = (\partial_{\mathfrak{h}} M) \times X$.
- (b) Seien M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und B eine glatte $(n-p)$ -Mannigfaltigkeit mit $\partial M = \partial B = \emptyset$. Sei $F \rightarrow M \xrightarrow{\pi} B$ ein glattes Faserbündel. Dann bilden die Zusammenhangskomponenten der Fasern $\pi^{-1}(x) \cong F$ für $x \in B$ die Blätter einer C^∞ -Blätterung \mathcal{F} der Kodimension $q = n - p = \dim B$ und der Dimension $p = \dim F$.
- (c) Sei M eine glatte n -Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^1(M)$ eine nichtsinguläre 1-Form auf M . Nach dem Satz von Frobenius definiert ω genau dann eine C^∞ -Blätterung \mathcal{F} der Kodimension 1 auf M durch die Angabe der $(n-1)$ -Distribution

$$T(\mathcal{F}) := \{v \in T(M) \mid \omega(x)(v) = 0, \text{ falls } v \in T_x(M)\},$$

wenn ω integrabel ist, d.h. wenn

$$d\omega = \omega \wedge \eta$$

für ein $\eta \in \Omega^1(M)$.

In dieser Arbeit werden fast immer die gleichen Typen von geblätterten Mannigfaltigkeiten auftreten, weshalb ab hier die folgenden abkürzenden Bezeichnungen die Lesbarkeit und Übersichtlichkeit verbessern sollen:

Mit einer Mannigfaltigkeit ist immer eine C^∞ -Mannigfaltigkeit gemeint. Blätterungen sind C^∞ -Blätterungen der Kodimension 1, sofern nichts anderes gesagt wird. Entsprechend meint der Begriff geblätterte Mannigfaltigkeit eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit einer C^∞ -Blätterung der Kodimension 1. Zusätzlich sollen alle Abbildungen zwischen geblätterten Mannigfaltigkeiten geblätterte Abbildungen sein.

1.1 Tangentiale Verklebung von Blätterungen

Ein wichtiges Konstruktionsprinzip bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten ist die Verklebung zweier Mannigfaltigkeiten über diffeomorphe

Ränder. Eine differenzierbare Struktur erhält man dabei durch Glättung entlang der Verklebungsstelle.

Um eine solche Konstruktion auf geblätterte Mannigfaltigkeiten zu übertragen, sollten die zu verklebenden Ränder selbst aus Blättern bestehen, d.h. tangentielle Ränder für die jeweiligen Blätterungen sein. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, liefert ein Verkleben der Mannigfaltigkeiten und der Blätterungen eine Mannigfaltigkeit mit einer (Kodimension 1)-Blätterung, die allerdings entlang der Verklebungsstelle nicht glatt sondern nur stetig ist. Eine Glättung ist im Blätterungsfall im Allgemeinen nicht möglich, da diese nicht blätterhaltend und damit nicht als geblätterte Abbildung gewählt werden kann.

Die Lösung des Differenzierbarkeitsproblems kann also nur in verschärften strukturellen Vorbedingungen an die Blätterungen der beiden Verklebungskandidaten liegen. Wären die Mannigfaltigkeiten jeweils in einer Kragenumgebung des Randes trivial, d.h. durch Parallelen zum Rand, geblättert, so könnten die Blätterungen auf triviale Weise glatt verklebt werden. Das gleiche Ergebnis erhält man aber auch bereits bei annähernd trivialem Verhalten im Rand, was dieser Abschnitt näher erklären soll.

1.1.1 Definition Sei (M, \mathcal{F}) eine geblätterte Mannigfaltigkeit und sei L eine Komponente des tangentialen Randes $\partial_\tau M$ von M , also insbesondere ein Blatt von \mathcal{F} . Die Blätterung \mathcal{F} heißt *randtrivial* in L , wenn sie glatt zu einer Blätterung der Kragemannigfaltigkeit $M \cup (L \times [0, 1[)$ erweitert werden kann, indem die Blätter auf dem Kragen $L \times [0, 1[$ als $L \times \{t\}$ für $0 \leq t < 1$ definiert werden.

Als *randtrivial* wird \mathcal{F} bezeichnet, wenn sie *randtrivial* in allen Komponenten des tangentialen Randes ist.

Eine große Klasse von Beispielen für randtriviale Blätterungen liefern die „eingedrehten Blätterungen“:

1.1.2 Definition Gegeben seien eine geblätterte Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) und eine Komponente R des transversalen Randes $\partial_\eta M$ von M .

Als *eingedrehte Blätterung* zu \mathcal{F} bezüglich R bezeichnet man eine Blätterung $\mathcal{F}^{R,sp}$ auf M , die außerhalb einer Kragenumgebung um R mit \mathcal{F} übereinstimmt und die *randtrivial* in R ist.

Erfüllt eine Blätterung auf M diese Bedingungen gleichzeitig für alle transversalen Randkomponenten, so heißt sie *eingedrehte Blätterung* zu \mathcal{F} und wird mit \mathcal{F}^{sp} bezeichnet.

Eine eingedrehte Blätterung verwandelt also insbesondere eine transversale in eine tangentielle Randkomponente und liefert zusätzlich randtriviales Verhalten in dieser Komponente.

Der Beweis des folgenden Lemmas beschreibt das Konstruktionsprinzip des „Eindrehens einer Blätterung entlang einer transversalen Randkomponente“.

1.1.3 Lemma *Sei R eine transversale Randkomponente einer geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) , deren induzierte Blätterung $\mathcal{F}|_R$ durch eine geschlossene nichtsinguläre 1-Form ω auf R definiert werden kann. Dann existiert auf M eine eingedrehte Blätterung $\mathcal{F}^{R,sp}$ zu \mathcal{F} bezüglich R .*

Beweis: Wähle eine Kragenumgebung N von R in M und eine Trivialisierung $\beta : N \xrightarrow{\cong} R \times]-1, 0]$, so dass $\mathcal{F}|_N = \beta^{-1}(\mathcal{F}|_{R \times]-1, 0]})$. Die gegebene Form ω auf R kann zu einer geschlossenen nichtsingulären 1-Form ω auf $R \times]-1, 0]$ erweitert werden, indem man sie auf dem Tangentialraum von $]-1, 0]$ als identisch 0 festlegt. Das so erweiterte ω definiert dann auf $R \times]-1, 0]$ genau die Blätterung $\mathcal{F}|_{R \times]-1, 0]}$.

Zum Eindrehen entlang R sei nun $\rho \in C^\infty(]-1, 0])$ eine Funktion, die auf $]-1, -\frac{1}{2}]$ identisch verschwindet, auf $[-\frac{1}{2}, 0]$ streng monoton von $0 = \rho(-\frac{1}{2})$ auf $1 = \rho(0)$ steigt und deren Ableitungen $\rho^{(m)}$ für alle $m \geq 1$ in 0 verschwinden. Insbesondere ist ρ in 0 also C^∞ -tangential an die Konstante $c \equiv 1$ auf $]-1, 0]$.

Falls $R \times]-1, 0]$ durch die Koordinaten (x, t) parametrisiert wird, ist durch

$$\theta := (1 - \rho(t))\omega + \rho(t)dt$$

eine 1-Form auf $R \times]-1, 0]$ gegeben, die auf $R \times]-1, -\frac{1}{2}]$ mit ω übereinstimmt und auf $R \times \{0\}$ mit dt . Außerdem ist θ integrierbar, denn

$$d\theta = -\rho'(t)dt \wedge \omega = \begin{cases} \theta \wedge \left(\frac{-\rho'(t)}{\rho(t)} \right) \omega & \text{auf } R \times]-\frac{1}{2}, 0] \\ \theta \wedge \left(\frac{\rho'(t)}{1-\rho(t)} \right) dt & \text{auf } R \times]-1, 0[\end{cases}.$$

Damit definiert θ wieder eine Blätterung $(\mathcal{F}|_{R \times]-1, 0]})^{sp}$ auf $R \times]-1, 0]$. Diese stimmt auf $R \times]-1, -\frac{1}{2}]$ noch mit $\mathcal{F}|_{R \times]-1, 0]}$ überein, dreht sich dann aber mit wachsendem Parameter t immer stärker ein und hat schließlich $R \times \{0\}$ selbst als Blatt.

Durch Zurückziehen mittels β liefert diese Konstruktion eine Blätterung $\mathcal{F}'|_N = \beta^{-1}((\mathcal{F}|_{R \times]-1, 0]})^{sp}$ auf N , die mit der Blätterung $\mathcal{F}|_{M \setminus N}$ auf dem Komplement von N in M glatt zu einer Blätterung $\mathcal{F}^{R,sp}$ auf ganz M zusammengesetzt werden kann, für die $R = \beta^{-1}(R \times \{0\})$ nun ein Blatt und damit eine tangentielle Randkomponente geworden ist.

Da die eindrehende Abbildung ρ in 0 C^∞ -tangential an die Konstante $c \equiv 1$ auf $] -1, 0]$ gewählt wurde, kann die 1-Form θ auf $R \times] -1, 0]$ durch dt glatt auf $R \times] -1, 1[$ erweitert werden. Dementsprechend besitzt die Blätterung $\mathcal{F}^{R,sp}$ eine glatte Fortsetzung durch Parallelen zu R auf $M \cup (R \times [0, 1[)$, ist also randtrivial in R . \square

In Abbildung 1.1 ist beispielhaft das Eindrehen der Blätterung $\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times] -1, 0]$ auf $\mathbb{S}^1 \times] -1, 0]$ zu sehen.

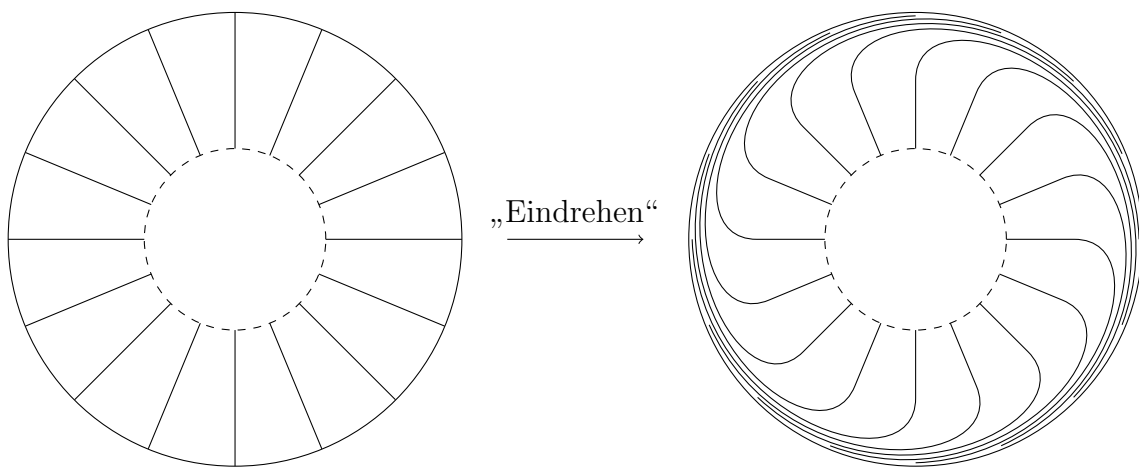


Abbildung 1.1: Das Eindrehen einer Blätterung entlang einer transversalen Randkomponente.

Betrachte nun zwei geblätterte n -Mannigfaltigkeiten (M_1, \mathcal{F}_1) und (M_2, \mathcal{F}_2) und einen Diffeomorphismus $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ zwischen den tangentialen Rändern $S_1 = \partial_\tau M_1$ und $S_2 = \partial_\tau M_2$. Bilde die Quotientenmannigfaltigkeit

$$M = M_1 \cup_\varphi M_2$$

und die zugehörige Blätterung

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup_\varphi \mathcal{F}_2,$$

die per Konstruktion zunächst nur eine stetige (Kodimension 1)-Blätterung auf M darstellt.

1.1.4 Satz Wenn (M_1, \mathcal{F}_1) und (M_2, \mathcal{F}_2) wie oben gegeben und beide Blätterungen randtrivial sind, dann ist (M, \mathcal{F}) wieder eine geblätterte Mannigfaltigkeit.

Beweis: Problematisch ist grundsätzlich nur das Verhalten der Kartenwechsel in der Verklebungsstelle $S := S_1 \cup_\varphi S_2$ in M . Es sei $i = 1$ oder 2 .

Auf den Kragen $S_i \times [0, 1[$ an M_i mit den Parallelenblätterungen $\{S_i \times \{t\}\}_{0 \leq t < 1}$ haben die Kartenwechsel in S_i die Form

$$\psi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (\psi_{S_i}(x_1, \dots, x_{n-1}), y),$$

wobei ψ_{S_i} die von M_i induzierten Kartenwechsel auf S_i sind.

Die rein tangentialen partiellen Ableitungen $\partial_\tau \psi_i$ von ψ_i (Ableitungen nach den x_1, \dots, x_{n-1}) hängen nur von den partiellen Ableitungen von ψ_{S_i} ab, die sich über den Diffeomorphismus φ entsprechen. Die rein transversalen partiellen Ableitungen $\partial_{\mathfrak{n}} \psi_i$ von ψ_i (Ableitungen nach y) hängen andererseits nur von den Ableitungen der Identität ab, die für $i = 1$ und 2 identisch sind. Und die restlichen (gemischten) partiellen Ableitungen von ψ_i sind alle 0 .

Da die Kartenwechsel auf M_i in S_i nach der Definition von Randtrivialität die gleichen partiellen Ableitungen aller Ordnungen wie die Abbildungen ψ_i haben müssen, passen diese über die Verklebung mittels φ zu glatten Kartenwechseln auf M in S zusammen. \square

Das prominenteste Beispiel für die Verklebung von randtrivialen Blätterungen ist die Konstruktion der Reebblätterung der 3-Sphäre.

1.1.5 Beispiel Realisiere \mathbb{S}^3 als Vereinigung zweier Volltori, nämlich

$$\mathbb{S}^3 = K_1 \cup_\varphi K_2,$$

wobei $K_i = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ für $i = 1, 2$ und

$$\begin{aligned} \varphi : \partial K_1 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 &\rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \partial K_2, \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\beta, \alpha). \end{aligned}$$

Für $i = 1, 2$ blättere zunächst K_i durch die Kreisscheiben $\mathbb{D}^2 \times \{x\}$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$. Der Randtorus $\partial K_i = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ liegt transversal zu dieser Blätterung und die induzierte Blätterung auf ∂K_i ist die Blätterung durch die Kreisscheiben $\mathbb{S}^1 \times \{x\}$ für alle $x \in \mathbb{S}^1$ und damit definiert durch die geschlossene nichtsinguläre 1-Form dx . Die Voraussetzungen für ein Eindrehen sind also erfüllt und die randtriviale Blätterung, die durch Eindrehen der Kreisscheibenblätterung auf K_i entsteht, heißt Reebblätterung des Volltorus.

Das Verkleben der Reebblätterungen von K_1 und K_2 mittels φ liefert schließlich die Reebblätterung der \mathbb{S}^3 .

1.2 Gefaserte Knoten und Knotenblätterungen

Nachdem nun die Bedingungen für eine tangential Verklebung von geblätterten Mannigfaltigkeiten bekannt sind, stellt sich die Frage, wie eine solche Verklebung genutzt werden kann, um neue Blätterungen auf gegebenen Mannigfaltigkeiten zu konstruieren. Eine Möglichkeit wäre in diesem Zusammenhang, eine Untermannigfaltigkeit auszuschneiden, diese und ihr Komplement mit einer randtrivialen Blätterung zu versehen und anschließend die Untermannigfaltigkeit wieder einzukleben.

Eine große Klasse von dafür geeigneten Untermannigfaltigkeiten bilden die gefaserten Knoten, eine Verallgemeinerung der von Milnor behandelten Verschlingungen einer isolierten Hyperebenen-Singularität [14]. Gefaserte Knoten treten in der Literatur auch unter der Bezeichnung “open books” [23] und “spinnable structures” [20] auf.

Da sich diese Arbeit speziell mit Blätterungen ungerade-dimensionaler Sphären beschäftigt, wird im Folgenden als Obermannigfaltigkeit immer direkt \mathbb{S}^{2n+1} , $n \geq 1$, eingesetzt.

1.2.1 Definition Ein gefasertes Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ für $n \geq 1$ ist eine Einbettung einer kompakten zusammenhängenden $(2n - 1)$ -Mannigfaltigkeit K in \mathbb{S}^{2n+1} mit trivialem Normalenbündel zusammen mit einem Faserbündel $F \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$, das sich in einer Umgebung von K wie eine Projektion verhält, d.h. es gibt eine geschlossene Tubenumgebung $T(K)$ von K und eine Trivialisierung $\alpha : T(K) \xrightarrow{\cong} K \times \mathbb{D}^2$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 T(K) \setminus K & \xrightarrow{\alpha|_{T(K) \setminus K}} & K \times (\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}) \\
 \searrow \pi|_{T(K) \setminus K} & & \swarrow p \\
 & & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

Dabei ist p die natürliche Projektion $(k, z) \mapsto \frac{z}{|z|}$ für $k \in K$ und $z \in \mathbb{D}^2 \setminus \{0\}$. Handelt es sich bei K ebenfalls um eine Sphäre, so spricht man auch von einem speziellen gefaserten Knoten $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{S}^{2n+1}$.

1.2.2 Bemerkung

- Der Abschluss der Faser F ist eine kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial \overline{F} = K$.
- $\pi|_{\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)}}$ ist immer noch ein Faserbündel. Die Faser ist isomorph zu \overline{F} und soll ebenfalls wieder mit \overline{F} bezeichnet werden.

Mit zu den prominentesten gefaserten Knoten gehört sicherlich die von Milnor untersuchte Verschlingung einer Polynomsingularität.

1.2.3 Beispiel Sei

$$p(z) = p(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$$

ein Polynom vom Grad $d > 0$ mit $p(0) = 0$, so dass $\nabla p(z) \neq (0, \dots, 0)$ für $z \neq (0, \dots, 0)$.

Die Varietät

$$V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid p(z) = 0\}$$

hat dann höchstens eine isolierte Singularität im Ursprung.

Bezüglich der eingeschränkten Abbildung $p : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ ist 0 ein regulärer Wert und die Verschlingung der Singularität

$$K = V \cap \mathbb{S}^{2n+1}$$

deshalb eine reguläre, kompakte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{S}^{2n+1} mit trivialem Normalenbündel.

Zusätzlich kann man zeigen, dass ein solches K immer $(n - 2)$ -zusammenhängend ist.

Betrachte nun die normierte Abbildung

$$\frac{p}{|p|} : \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Diese Abbildung ist ein Faserbündel, bei dem jede Faser F den Homotopietyp eines Bouquets $\mathbb{S}^n \vee \dots \vee \mathbb{S}^n$ von n -Sphären hat.

Da 0 ein regulärer Wert der Abbildung $p : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ ist, existiert eine Tubenumgebung $T_\epsilon(K)$ von K , in der die Abbildung $p : T_\epsilon(K) \rightarrow \mathbb{D}^2(\epsilon)$ mit $\mathbb{D}^2(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \epsilon\}$ für ein ausreichend kleines $\epsilon > 0$ ein triviales Faserbündel mit Faser K ist.

Die eingeschränkte normierte Abbildung

$$\frac{p}{|p|} : T_\epsilon(K) \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$$

entspricht also einer Projektion und K erfüllt nach Definition 1.2.1 alle Bedingungen eines gefaserten Knotens in \mathbb{S}^{2n+1} .

Den wichtigsten und zugleich einfachsten Spezialfall in diesem Zusammenhang liefert das Polynom

$$p(z_0, \dots, z_n) = z_0.$$

Hier ist die Varietät von p gegeben durch

$$V = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0 = 0\}$$

und die Verschlingung der Singularität 0 von V hat die Gestalt

$$K = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0 = 0, |z| = 1\} \cong \{w \in \mathbb{C}^n \mid |w| = 1\} \cong \mathbb{S}^{2n-1}.$$

Es liegt also ein spezieller gefasertes Knoten vor. Und auch das Faserbündel

$$\begin{aligned} \frac{p}{|p|} : \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\mapsto \frac{z_0}{|z_0|} \end{aligned}$$

lässt sich in diesem Fall einfach beschreiben:

Über den Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K &\cong \mathbb{S}^1 \times \mathring{\mathbb{D}}^{2n} \\ (z_0, \dots, z_n) &\mapsto \left(\frac{z_0}{|z_0|}, z_1, \dots, z_n \right) \\ ((1 - |(z_1, \dots, z_n)|^2)\theta, z_1, \dots, z_n) &\leftarrow (\theta, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

wird $\frac{p}{|p|}$ zu der Projektion

$$\mathbb{S}^1 \times \mathring{\mathbb{D}}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^1$$

auf die erste Komponente.

Die Faser $F = \mathring{\mathbb{D}}^{2n}$ hat hier den Homotopietyp des speziellen Bouquets von 0 n -Sphären.

Sei nun ein beliebiger gefasertes Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ gegeben.

Die Obermannigfaltigkeit \mathbb{S}^{2n+1} kann dann zerlegt werden als

$$\mathbb{S}^{2n+1} \cong T(K) \cup_{\partial T(K)} C$$

mit $C := \overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)}$ und falls sowohl $T(K)$ als auch C eine randtriviale Blätterung besitzen, so besitzt nach Satz 1.1.4 \mathbb{S}^{2n+1} durch Verklebung beider Blätterungen über das gemeinsame Randblatt $\partial T(K)$ auch wieder eine Blätterung.

1.2.4 Lemma *Das abgeschlossene Komplement C der Knotentube $T(K)$ besitzt eine randtriviale Blätterung.*

Beweis: Nach den Voraussetzungen an einen gefaserten Knoten induziert das Faserbündel $\pi|_C$ eine Blätterung \mathcal{F}_C auf C , die $\partial T(K)$ als transversalen Rand hat. Die auf $\partial T(K)$ induzierte Blätterung wird außerdem durch die Blätter $\alpha^{-1}(K \times \{\theta\})$ für $\theta \in \mathbb{S}^1$ beschrieben und damit durch die geschlossene nichtsinguläre 1-Form $\alpha^{-1}(d\theta)$ definiert.

Die Bedingungen für ein Eindrehen der Blätterung \mathcal{F}_C auf C sind also erfüllt und Lemma 1.1.3 garantiert die Existenz einer eingedrehten Blätterung \mathcal{F}_C^{sp} zu \mathcal{F}_C , die insbesondere randtrivial ist. \square

1.2.5 Definition Eine Blätterung \mathcal{F} auf \mathbb{S}^{2n+1} heißt Knotenblätterung, wenn es einen gefaserten Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ gibt, so dass \mathcal{F} die tangentielle Verklebung einer beliebigen randtrivialen Blätterung auf $T(K)$ und einer wie in Lemma 1.2.4 konstruierten Blätterung auf C ist.

Von einer speziellen Knotenblätterung spricht man, wenn als zugrunde liegender Knoten ein spezieller gefasertes Knoten $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ gewählt werden kann.

Knotenblätterungen der Sphären werden auch mit \mathcal{K} bezeichnet.

1.2.6 Beispiel Betrachte den speziellen gefaserten Knoten $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^3$ aus dem Spezialfall in Beispiel 1.2.3. Die Zerlegung

$$\mathbb{S}^3 \cong T(\mathbb{S}^1) \cup_{\partial T(\mathbb{S}^1)} \overline{\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^1)}$$

der 3-Sphäre in die Knotentube und das abgeschlossenen Knotentubenkomplement ist mit den Identifizierungen

$$\begin{aligned} T(\mathbb{S}^1) &\cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2 \\ \mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^1) &\cong \mathbb{S}^3 \setminus \mathbb{S}^1 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathring{\mathbb{D}}^2 \end{aligned}$$

gleich der Zerlegung der \mathbb{S}^3 in die beiden Volltori aus Beispiel 1.1.5.

Die dort beschriebene Reebblätterung des Volltorus liefert einerseits überhaupt eine randtriviale Blätterung auf $T(\mathbb{S}^1)$ und folgt andererseits genau der Blätterungskonstruktion aus Lemma 1.2.4 für $\overline{\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^1)}$.

Die 3-Sphäre besitzt also mit der Reebblätterung gleichzeitig eine spezielle Knotenblätterung.

1.3 Existenz von Knotenblätterungen

Die Existenz von Blätterungen auf den ungerade-dimensionalen Sphären könnte durch die Konstruktion von Knotenblätterungen elegant, allgemein und auch einigermaßen explizit bewiesen werden. Doch zunächst ist – bis auf

bekannte Spezialfälle wie den der Reebblätterung aus Beispiel 1.1.5 – nicht sofort einzusehen, dass die Voraussetzung der Existenz einer randtrivialen Blätterung auf der Knotentube aus Definition 1.2.5 auf Sphären beliebiger ungerader Dimension erfüllt werden kann.

1.3.1 Lemma *Besitzt \mathbb{S}^{2n+1} eine Knotenblätterung, so besitzt $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{D}^2$ eine randtriviale Blätterung und \mathbb{S}^{2n+1} insbesondere auch eine spezielle Knotenblätterung.*

Beweis: Sei $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ ein gefasertes Knoten, der der gegebenen Knotenblätterung \mathcal{K} von \mathbb{S}^{2n+1} zugrunde liegt. Nach Konstruktion stimmt \mathcal{K} auf einem Teil P von $\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(K)$ mit der durch das Faserbündel π induzierten Blätterung überein.

Wähle auf P als geschlossene totale Transversale zu \mathcal{K} einen beliebigen Schnitt γ in $\pi|_P$. Es sei $T(\gamma)$ eine Tubenumgebung von γ mit Trivialisierung $\delta : T(\gamma) \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^{2n}$, auf der $\mathcal{K}|_{T(\gamma)} = \delta^{-1}(\{\{\theta\} \times \mathbb{D}^{2n}\}_{\theta \in \mathbb{S}^1})$ gilt.

$\pi_{\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus (T(K) \cup T(\gamma))}}$ ist dann immer noch ein Faserbündel und induziert eine Blätterung auf $\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus (T(K) \cup T(\gamma))}$. Diese wiederum induziert auf dem transversalen Rand $\partial T(K) \cup \partial T(\gamma)$ die Blätterung $\alpha^{-1}(\{K \times \{\theta_1\}\}_{\theta_1 \in \mathbb{S}^1}) \cup \delta^{-1}(\{\{\theta_2\} \times \mathbb{S}^{2n-1}\}_{\theta_2 \in \mathbb{S}^1})$, die durch die geschlossene nichtsinguläre 1-Form $\alpha^{-1}(d\theta_1)$ auf $\partial T(K)$ und $\delta^{-1}(d\theta_2)$ auf $\partial T(\gamma)$ definiert ist.

Eine Anwendung von Lemma 1.1.3 liefert jetzt die Existenz einer randtrivialen Blätterung auf $\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus (T(K) \cup T(\gamma))}$. Mit Einkleben der nach Voraussetzung existierenden randtrivialen Blätterung auf $T(K)$ entsteht auf $\overline{\mathbb{S}^{2n+1} \setminus T(\gamma)}$ und dem dazu diffeomorphen $\mathbb{S}^{2n-1} \times \mathbb{D}^2$ ebenfalls wieder eine randtriviale Blätterung.

Da es nach Beispiel 1.2.3 mindestens einen speziellen gefaserten Knoten $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ gibt, besitzt \mathbb{S}^{2n+1} mit einer Knotenblätterung also immer auch eine spezielle Knotenblätterung. \square

1.3.2 Satz *Jede ungerade-dimensionale Sphäre \mathbb{S}^{2n+1} besitzt eine Knotenblätterung.*

Beweis: Für $n = 1$ ist die Reebblätterung der \mathbb{S}^3 ein Beispiel für eine Knotenblätterung, im Fall $n = 2$ hat Lawson als gefaserten Knoten $K \subset \mathbb{S}^5$ eine Verschlingung einer Polynomsingularität angegeben, die als Torusbündel über \mathbb{S}^1 aufgefasst werden kann, so dass $K \times \mathbb{D}^2$ die geforderte randtriviale Blätterung besitzt.

Der Fall $n \geq 3$ kann jetzt einheitlich behandelt werden:

Angenommen, für jedes $n \geq 3$ existiert ein gefasertes Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$, so

dass K ein Faserbündel über \mathbb{S}^k ist für ein ungerades $k < 2n - 1$. Unter dieser Annahme lässt sich die Behauptung des Satzes durch Induktion beweisen: Der gefaserte Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ ist ein Faserbündel über \mathbb{S}^k und fasert die Tubenumgebung $T(K) \cong K \times \mathbb{D}^2$ über $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^2$. Da $k + 2 < 2n + 1$, besitzt nach Induktionsvoraussetzung \mathbb{S}^{k+2} eine Knotenblätterung. Nach Lemma 1.3.1 gibt es dann auf $\mathbb{S}^k \times \mathbb{D}^2$ eine randtriviale Blätterung, welche sich auf eine randtriviale Blätterung von $T(K)$ zurückziehen lässt. Damit besitzt \mathbb{S}^{2n+1} eine Knotenblätterung mit zugrunde liegendem Knoten K .

Zur Vervollständigung des Beweises muss nur noch die Annahme über die Existenz geeigneter gefaserner Knoten gerechtfertigt werden.

Fall 1: $n \geq 3$ ungerade.

Sei $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ die Verschlingung der Singularität von

$$z_0^2 + \dots + z_n^2 = 0$$

im Ursprung. Dann ist K diffeomorph zur Stiefelmannigfaltigkeit $V_{n+1,2}$, die über \mathbb{S}^n fasert.

Fall 2: $n \geq 4$ gerade.

Sei $K' \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ die Verschlingung der Singularität von

$$(z_0 + z_1^2)(z_0^2 + z_1^5) + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0$$

im Ursprung. Man kann zeigen, dass K' diffeomorph zu $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^n) \# \Sigma$ für ein $\Sigma \in \text{bP}_{2n}$ ist. Da $-\Sigma$ ebenfalls als Verschlingung einer Polynomsingularität und damit als gefasertes Knoten auftritt, bildet die zusammenhängende Summe $K' \# (-\Sigma)$ einen gefaserten Knoten $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$, der diffeomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^n$ und damit ein Faserbündel über \mathbb{S}^{n-1} ist. \square

Die relative Existenz von speziellen Knotenblätterungen aus Lemma 1.3.1 zusammen mit der gerade bewiesenen Existenz von Knotenblätterungen liefert sofort die verschärfte Aussage:

1.3.3 Folgerung *Jede \mathbb{S}^{2n+1} besitzt eine spezielle Knotenblätterung.*

Zusätzlich folgt sogar, dass jeder beliebige spezielle Knoten $\mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ zu einer speziellen Knotenblätterung führt, insbesondere auch der spezielle Knoten mit der kanonischen Projektion $\mathbb{S}^1 \times \mathring{\mathbb{D}}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^1$ als Faserbündel auf dem Knotenkomplement, wie er im Spezialfall von Beispiel 1.2.3 beschrieben wird.

Kapitel 2

Kohomologie der Knotenblätterungen

Die Konstruktion von Knotenblätterungen auf allen Sphären ungerader Dimension löst die Existenzfrage für (Kodimension 1)-Blätterungen der Sphären. Will man geblätterte Mannigfaltigkeiten aber über ihre reine Definition und Konstruktion hinaus verstehen, so ist es wichtig, auch ihre Blätterungskohomologie, eine Abwandlung der deRham-Kohomologie, die genau die zusätzliche Blätterungsstruktur berücksichtigt, zu kennen. Obwohl auch die Definition einer Topologie auf diesen Kohomologieräumen möglich ist, wird das folgende Kapitel sich ausschließlich um die algebraische Vektorraumstruktur der Blätterungskohomologie kümmern, um die Spaltungen von Mayer-Vietoris-Sequenzen, die für topologische Vektorräume nicht existieren müssen, ausnutzen zu können. Das entscheidende Merkmal in diesem Zusammenhang ist die Dimension der einzelnen Kohomologieräume und diese ist im Gegensatz zur normalen deRham-Kohomologie nicht unbedingt endlich. Als Hauptresultat wird am Ende dieses Kapitels dann auch gezeigt werden, dass für Knotenblätterungen der Sphären die Dimension der Blätterungskohomologie tatsächlich in bestimmten Graden unendlich ist.

Bevor wir aber in die konkreten Kohomologieberechnungen einsteigen, sollen kurz die nötigen Grundlagen zur Blätterungskohomologie zusammengetragen werden.

Dafür sei M ganz allgemein eine glatte n -Mannigfaltigkeit und \mathcal{F} eine C^r -Blätterung der Kodimension $q = n - p$ auf M mit $1 \leq r \leq \infty$ und $0 \leq p \leq n$.

2.0.4 Definition Das Tangentialbündel $T(\mathcal{F})$ von \mathcal{F} ist das Unterbündel von $T(M)$, das tangential an die Blätter von \mathcal{F} ist.

Der Raum der Blätterungsdifferentialformen ist dann

$$\Omega^*(M, \mathcal{F}) := \Gamma(M, \Lambda^*(T^*(\mathcal{F})))$$

und jede k -Blätterungsform $\omega \in \Omega^k(M, \mathcal{F})$ hat lokal die Form

$$\omega(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) = \sum_{(i_1, \dots, i_k)} f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

für ein $f \in C^r(M)$.

Als Annihilator von \mathcal{F} bezeichnet man das Ideal $I^*(\mathcal{F}) \subseteq \Omega^*(M)$, das durch

$$I^k(\mathcal{F}) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \omega(v) \equiv 0 \ \forall v \in \Gamma^r(M, \Lambda^k(T(\mathcal{F})))\}$$

für alle $k \geq 0$ definiert ist.

Mit Hilfe des Annihilators lässt sich $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ auch schreiben als

$$\Omega^*(M, \mathcal{F}) = \Omega^*(M) / I^*(\mathcal{F})$$

und diese Darstellung ist besonders hilfreich für eine kanonische Beschreibung des Blätterungsdifferentials

$$d_{\mathcal{F}} : \Omega^k(M, \mathcal{F}) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, \mathcal{F})$$

für alle $k \geq 0$.

Denn nach dem Satz von Frobenius ist $T(\mathcal{F})$ integrabel, was äquivalent ist zu der Aussage, dass $I^*(\mathcal{F})$ ein Differentialideal ist, d.h. $d(I^*(\mathcal{F})) \subseteq I^*(\mathcal{F})$ für das Differential d des deRham-Komplexes $(\Omega^*(M), d)$. Und damit induziert d auf dem Quotienten $\Omega^*(M) / I^*(\mathcal{F})$ ein Differential $d_{\mathcal{F}}$.

Lokal ist dieses Blätterungsdifferential im Grad k definiert durch

$$d_{\mathcal{F}}\omega(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) := \sum_{(i_1, \dots, i_k), j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Die Kohomologie $H^*(M, \mathcal{F})$ des so definierten Komplexes $(\Omega^*(M, \mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$ heißt Blätterungskohomologie der geblätterten Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) .

2.0.5 Bemerkung

- (a) $\Omega^k(M, \mathcal{F})$ ist in allen Graden k ein $C^r(M)$ -Modul und ein reeller Vektorraum.
- (b) Das Tangentialbündel $T(\mathcal{F})$ hat die Dimension p der Blätter von \mathcal{F} . Dementsprechend ist $\Omega^k(M, \mathcal{F}) = 0$ für alle $k > p$.
- (c) Falls \mathcal{F} die Kodimension 0 hat, ist $H^*(M, \mathcal{F})$ die normale deRham-Kohomologie von M .

Eines der fundamentalen Beispiele für Blätterungskohomologie, auf das im Wesentlichen auch alle Berechnungen dieses Kapitels zurückgehen, ist die Kohomologie der „gepunkteten Gerade“.

2.0.6 Beispiel Wir betrachten \mathbb{R} mit der C^∞ -(Kodimension 1)-Blätterung $\mathcal{F}_0^{\mathbb{R}} = \{\{x\}\}_{x \in \mathbb{R}}$. Da die Dimension der Blätter 0 ist, ist die zugehörige Blätterungskohomologie höchstens im Grad 0 nichttrivial. Es ist

$$\Omega^0(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$$

und

$$d_{\mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}} f = 0$$

für alle $f \in \Omega^0(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}})$.

Damit ist die Blätterungskohomologie

$$H^k(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zugleich erbringt bereits dieses einfache Beispiel den Beweis dafür, dass Blätterungskohomologieräume nicht endlichdimensional sein müssen.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Blätterungskohomologie ist die Blätterungshomotopieinvarianz.

2.0.7 Definition Seien (M, \mathcal{F}) und (N, \mathcal{G}) geblätterte Mannigfaltigkeiten und $f, g : M \rightarrow N$ geblätterte Abbildungen. Eine Blätterungshomotopie zwischen f und g ist eine geblätterte Abbildung

$$h : M \times \mathbb{R} \rightarrow N,$$

wobei $M \times \mathbb{R}$ durch $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ geblättert ist, so dass

$$h(x, t) = \begin{cases} f(x) & t \leq 0 \\ g(x) & t \geq 1 \end{cases} .$$

Alle weiteren homotopietheoretischen Begriffe wie Homotopieäquivalenz, Retrakt etc. können jetzt analog auch für den Blätterungsfall definiert werden.

Wie für die normale deRham-Kohomologie kann man zeigen, dass blätterungshomotopieäquivalente geblätterte Mannigfaltigkeiten die gleiche Blätterungskohomologie haben. Diese Eigenschaft werden wir im Folgenden

oft benutzen, indem wir geblätterte Mannigfaltigkeiten entlang der Blätter zusammenziehen und dann die Blätterungskohomologie der Retrakte berechnen.

Ab jetzt sollen wieder alle geblätterten Mannigfaltigkeiten glatte Mannigfaltigkeiten mit C^∞ -Blätterungen der Kodimension 1 sein und alle Abbildungen geblätterte Abbildungen.

2.1 Technische Vorbereitungen

Gegeben sei eine Knotenblätterung \mathcal{K} auf \mathbb{S}^{2n+1} . Sei $K \subset \mathbb{S}^{2n+1}$ ein zugrunde liegender gefasertes Knoten mit Faserbündel $F \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \setminus K \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^1$. \mathcal{K} ist also entstanden durch die tangentielle Verklebung einer randtrivialen Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} auf $C := \overline{\mathbb{S}^{2n+1}} \setminus T(K)$, konstruiert wie in Lemma 1.2.4 durch Eindrehen der durch $\pi|_C$ auf C induzierten Blätterung \mathcal{K}_C entlang $\partial C = \partial T(K)$, und einer randtrivialen Blätterung $\mathcal{K}_{T(K)}$ auf $T(K)$.

Allein auf Grundlage der Definition von \mathcal{K} weiß man nur wenig über die Blätterung auf $T(K)$, nämlich nichts bis auf die Randtrivialität, während man durch die Darstellung von \mathcal{K}_C als Faserungsblätterung und durch die explizite Konstruktion der eingedrehten Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} zu \mathcal{K}_C einen guten Zugang zu der Blätterung auf C hat, der sich auch für Berechnungen nutzen lässt. Das Ziel von Kohomologieberechnungen kann also nicht die konkrete Blätterungskohomologie von $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ sein, sondern vielmehr die Erschließung bestimmter interessanter Eigenschaften aus der Blätterungskohomologie des Teilraums (C, \mathcal{K}_C^{sp}) . Insbesondere wird so die Frage nach den Dimensionen der Kohomologieräume am Ende dieses Kapitels geklärt werden.

Die kanonische Inklusion $C \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ kann leider nicht direkt für Schlussfolgerungen in der Blätterungskohomologie herangezogen werden, da die induzierte Abbildung $H^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K}) \rightarrow H^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ keine guten Eigenschaften wie Injektivität oder Surjektivität besitzt. Eine Vergleichsmöglichkeit für diese beiden Kohomologieräume ergibt sich aber durch eine Abwandlung der zugrunde liegenden Blätterungsdifferentialformen, was später im Zusammenhang mit den angestrebten Dimensionsaussagen ausführlich dargelegt wird.

2.1.1 Definition Sei (M, \mathcal{F}) eine geblätterte n -dimensionale Mannigfaltigkeit und L eine tangentielle Randkomponente von (M, \mathcal{F}) . Falls \mathcal{F} randtrivial in L ist, dann sei $\Omega_L^*(M, \mathcal{F})$ der Unterkomplex von $\Omega^*(M, \mathcal{F})$ der auf L C^∞ -verschwindenden Blätterungsdifferentialformen auf M , d.h.

$\Omega_L^*(M, \mathcal{F}) := \{\omega \in \Omega^*(M, \mathcal{F}) \mid \omega \text{ kann durch } 0 \text{ glatt auf den parallel geblätternen Kragen } (L \times [0, 1[, \{L \times \{t\}\}_{0 \leq t < 1}) \text{ an } (M, \mathcal{F}) \text{ fortgesetzt werden}\}.$

Die so definierten Blätterungs-differentialformen heißen *randtrivial* in L . Die zugehörige Kohomologie soll mit $H_L^*(M, \mathcal{F})$ bezeichnet werden und ebenfalls *randtrivial* in L heißen.

Für eine Vereinigung von tangentialen Randkomponenten L_1 und L_2 sei

$$\Omega_{L_1 \cup L_2}^*(M, \mathcal{F}) := \Omega_{L_1}^*(M, \mathcal{F}) \cap \Omega_{L_2}^*(M, \mathcal{F})$$

mit zugehöriger Kohomologie $H_{L_1 \cup L_2}^*(M, \mathcal{F})$.

Davon ausgehend heißen Blätterungs-differentialformen und Blätterungskohomologie *randtrivial*, falls sie in allen Komponenten des tangentialen Randes *randtrivial* sind.

2.1.2 Bemerkung Für eine offene geblätternete n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $(P, \mathcal{F}|_P)$ von (M, \mathcal{F}) lässt sich die Definition der in L randtrivialen Blätterungs-differentialformen wie folgt interpretieren

$$\Omega_L^*(P, \mathcal{F}|_P) := \Omega_{L \cap P}^*(P, \mathcal{F}|_P) \text{ und } H_L^*(P, \mathcal{F}|_P) := H_{L \cap P}^*(P, \mathcal{F}|_P).$$

Insbesondere gilt für $P \cap \partial M = \emptyset$ also $H_L^*(P, \mathcal{F}|_P) = H^*(P, \mathcal{F}|_P)$.

Wie in der klassischen Blätterungskohomologie können auch im randtrivialen Fall Mayer-Vietoris-Sequenzen ein wichtiges Hilfsmittel für konkrete Berechnungen sein.

2.1.3 Satz Sei (M, \mathcal{F}) eine geblätternete n -dimensionale Mannigfaltigkeit und seien U und V offene geblätternete Untermannigfaltigkeiten von M mit $M = U \cup V$. Seien $i_U : U \hookrightarrow M$, $i_V : V \hookrightarrow M$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ die natürlichen Inklusionen, dann ist für alle tangentialen Randkomponenten L von (M, \mathcal{F}) , in denen \mathcal{F} *randtrivial* ist,

$$\begin{array}{c} \dots \xrightarrow{j_U^{k-1} - j_V^{k-1}} H_L^{k-1}(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V}) \\ \curvearrowright \\ H_L^k(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{(i_U^k, i_V^k)} H_L^k(U, \mathcal{F}|_U) \oplus H_L^k(V, \mathcal{F}|_V) \xrightarrow{j_U^k - j_V^k} H_L^k(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V}) \\ \curvearrowright \\ H_L^{k+1}(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{(i_U^{k+1}, i_V^{k+1})} \dots \end{array}$$

eine lange exakte Sequenz in der in L *randtrivialen* Blätterungskohomologie.

Beweis: Durch

$$0 \rightarrow \Omega_L^*(M, \mathcal{F}) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega_L^*(U, \mathcal{F}|_U) \oplus \Omega_L^*(V, \mathcal{F}|_V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega_L^*(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V}) \rightarrow 0$$

ist eine kurze exakte Sequenz von Differentialformen gegeben, die die behauptete lange exakte Kohomologiesequenz liefert.

Die Exaktheit der kurzen Sequenz wird wie im Fall der normalen deRham-Kohomologie bewiesen. Die dort verwendete glatte Zerlegung der Eins für $\{U, V\}$ liefert auch hier zulässige Koeffizientenfunktionen in der Urbildkonstruktion für die Exaktheit in $\Omega_L^*(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V})$, da alle beteiligten Räume von in L randtrivialen Blätterungsdifferentialformen wieder $C^\infty(M)$ -Moduln sind. \square

Die in L randtriviale Blätterungskohomologie von (M, \mathcal{F}) lässt sich also aus der in L randtrivialen Blätterungskohomologie der Mayer-Vietoris-Unterräume $(U, \mathcal{F}|_U)$ und $(V, \mathcal{F}|_V)$ und des Mayer-Vietoris-Durchschnitts $(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V})$ ermitteln durch

$$H_L^k(M, \mathcal{F}) \cong \text{koker}(j_U^{k-1} - j_V^{k-1}) \oplus \ker(j_U^k - j_V^k).$$

2.1.4 Bemerkung Die Mayer-Vietoris-Sequenz ist natürlich bezüglich geblätterter Abbildungen $f : M \rightarrow M'$ mit $f(U) \subseteq U'$ und $f(V) \subseteq V'$, falls $M = U \cup V$ und $M' = U' \cup V'$ die Mayer-Vietoris-Zerlegungen der beiden Mannigfaltigkeiten sind.

Die Spaltungen in der Mayer-Vietoris-Sequenz und der obige Isomorphismus sind dagegen nicht natürlich, was bei den kommenden Berechnungen berücksichtigt werden muss.

Die Definition von randtriviale Blätterungskohomologie soll nun im vorliegenden Fall der Knotenblätterung \mathcal{K} der S^{2n+1} Anwendung finden.

Da die eingedrehte Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} zu \mathcal{K}_C auf dem Knotentubenkomplement C nach Konstruktion randtrivial ist, kann die randtriviale Blätterungskohomologie $H_{\partial C}^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ gebildet werden, deren Berechnung das Ziel der nächsten Abschnitte sein wird.

Die grundlegende Mayer-Vietoris-Zerlegung zur Berechnung von $H_{\partial C}^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ beruht auf der speziellen Konstruktion der Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} durch Eindrehen der Faserungsblätterung \mathcal{K}_C entlang ∂C :

Sei N die gewählte Kragenumgebung des bezüglich \mathcal{K}_C transversalen Randes ∂C aus dem Beweis von Lemma 1.1.3 und sei $\beta : N \xrightarrow{\cong} \partial C \times]-1, 0]$ die

Trivialisierung von N , so dass $\mathcal{K}_{C|N} = \beta^{-1}(\mathcal{K}_{C|\partial C} \times]-1, 0])$ gilt. Definiere N' als die Teilmenge $\beta^{-1}(\partial C \times [-\frac{1}{2}, 0])$ von N , dann ist

$$C = N \cup C \setminus N'$$

eine Mayer-Vietoris-Zerlegung von C in zwei offene Untermannigfaltigkeiten. Über die Blätterungen der Mayer-Vietoris-Unterräume und des Mayer-Vietoris-Durchschnitts kann bereits aufgrund der Definitionen einiges gesagt werden.

2.1.5 Bemerkung

- (a) Mit $\partial C = \partial T(K) \cong K \times \mathbb{S}^1$ ist die Kragenumgebung N diffeomorph zu $K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, 0]$ und die auf N induzierte Faserungsblätterung $\mathcal{K}_{C|N}$ diffeomorph zu der Blätterung, die durch die Blätter $K \times \{\theta\} \times]-1, 0]$ für alle $\theta \in \mathbb{S}^1$ gegeben ist.

Weil das Eindrehen von \mathcal{K}_C vollständig auf N stattfindet, gilt

$$(\mathcal{K}_C^{sp})|_N \cong (\mathcal{K}_{C|N})^{sp} \cong (K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}.$$

Weiterhin ist das von K unabhängige $d\theta$ die definierende 1-Form der durch $K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0]$ induzierten Blätterung auf dem Rand $K \times \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ von $K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, 0]$. Da die eingedrehte Blätterung $(K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$ über dieses $d\theta$ und eine eindrehende Abbildung auf $] -1, 0]$ definiert wird, ist das gesamte Eindrehen auf $K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, 0]$ unabhängig von K und es ist

$$(K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} = K \times (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}.$$

- (b) Bei der Konstruktion von \mathcal{K}_C^{sp} wird der Teil $C \setminus N'$ vom Eindrehen überhaupt nicht berührt, da die eindrehende Abbildung auf $] -1, -\frac{1}{2}[$ identisch verschwindet, und

$$(\mathcal{K}_C^{sp})|_{C \setminus N'} = \mathcal{K}_{C|C \setminus N'}.$$

Nach der Wahl von N ist $\pi|_{C \setminus N'}$ immer noch ein Faserbündel mit Faser diffeomorph zu F und $\mathcal{K}_{C|C \setminus N'}$ kann auch direkt als die durch $\pi|_{C \setminus N'}$ induzierte Blätterung auf $C \setminus N'$ interpretiert werden.

- (c) Das Eindrehen von \mathcal{K}_C vollzieht sich außerhalb von $C \setminus N'$ und gleichzeitig ist \mathcal{K}_C auf N diffeomorph zu $K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0]$, deshalb ergibt sich auf dem Mayer-Vietoris-Durchschnitt für die Blätterung die besonders einfache Form

$$(\mathcal{K}_C^{sp})|_{N \cap C \setminus N'} = \mathcal{K}_{C|N \cap C \setminus N'} \cong K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[.$$

Zur Abkürzung sollen im Folgenden die auf den Untermannigfaltigkeiten von C durch \mathcal{K}_C^{sp} induzierten Blätterungen ohne Kennzeichnung der Einschränkung wieder nur mit \mathcal{K}_C^{sp} bezeichnet werden.

Um die randtriviale Blätterungskohomologie $H_{\partial C}^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ mit Hilfe der angegebenen Mayer-Vietoris-Zerlegung zu berechnen, muss als Erstes die randtriviale Blätterungskohomologie des Mayer-Vietoris-Durchschnitts $N \cap C \setminus N'$ und der Mayer-Vietoris-Unterräume $C \setminus N'$ und N ermittelt und die Inklusionen des Mayer-Vietoris-Durchschnitts bzw. ihre induzierten Abbildungen in der Kohomologie untersucht werden. Anschließend kann die Mayer-Vietoris-Sequenz aufgestellt und ausgewertet werden.

Nach Bemerkung 2.1.2 betrifft die Randtrivialität der Differentialformen bei den Kohomologieberechnungen nur den Mayer-Vietoris-Unterraum N , da $(N \cap C \setminus N') \cap \partial C = C \setminus N' \cap \partial C = \emptyset$. Im Folgenden werden die relevanten Kohomologieräume deshalb $H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) = H_{\partial C}^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$, $H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) = H_{\partial C}^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ und $H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp})$ sein.

2.2 Kohomologie von $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$

Wie bereits in Bemerkung 2.1.5 (c) festgestellt, ist $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ diffeomorph zu $(K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[)$. Es gibt also ein triviales Faserbündel

$$K \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{S}^1,$$

das die Blätterung induziert.

Der folgende Satz ist eine Art Verallgemeinerung des Leray-Hirsch-Theorems.

2.2.1 Satz Sei $L \rightarrow X \xrightarrow{p} B$ ein Faserbündel mit n -dimensionalem Totalraum X und d -dimensionaler Faser $L_b \cong L$ über jedem $b \in B$. Sei \mathcal{F} die C^∞ -Blätterung der Kodimension $c = n - d$ auf X , die durch p induziert wird.

Weiterhin sei $H^*(L) \rightarrow E^* \xrightarrow{q^*} B$ das zu p gehörige Kohomologiebündel mit Faser $H^*(L)_b := H^*(L_b) \cong H^*(L)$ über jedem $b \in B$ und Totalraum $E^* := \coprod_{b \in B} H^*(L)_b$. Dann ist die Blätterungskohomologie von (X, \mathcal{F}) isomorph zu den C^∞ -Schnitten in q^* , d.h.:

$$H^*(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma^\infty(B, E^*, q^*).$$

Beweis: Die Behauptung soll durch Angabe eines expliziten Isomorphismus

$$H^*(X, \mathcal{F}) \underset{g^*}{\overset{f^*}{\rightleftarrows}} \Gamma^\infty(B, E^*, q^*)$$

nachgewiesen werden.

Da sowohl $H^*(X, \mathcal{F})$ und $\Gamma^\infty(B, E^*, q^*)$ als auch f^* und g^* graduierte Objekte sind, muss dazu in jedem Grad $k = 0, \dots, d$ ein Isomorphismus

$$H^k(X, \mathcal{F}) \underset{g^k}{\overset{f^k}{\rightleftarrows}} \Gamma^\infty(B, E^k, q^k)$$

gefunden werden, wobei $H^k(L) \rightarrow E^k \xrightarrow{q^k} B$ das entsprechende Kohomologiebündel im Grad k ist.

Sei $[\omega] \in H^k(X, \mathcal{F})$, d.h. $\omega \in \Omega^k(X, \mathcal{F})$ mit $d_{\mathcal{F}}\omega = 0$.

Definiere $s = f^k([\omega]) \in \Gamma^\infty(B, E^k, q^k)$ durch die Angabe eines Repräsentanten $s_b \in \Omega^k(L_b)$ von $s(b) \in H^k(L_b)$ für alle $b \in B$ als

$$s_b(y) := \omega(y) \quad \forall y \in L_b.$$

Diese Repräsentanten s_b hängen glatt von b ab, da ω glatt ist und die Inklusionen $L_b = p^{-1}(b) \hookrightarrow X$ aufgrund der lokalen Trivialität von p glatt von b abhängen.

Außerdem ist $ds_b(y) = d_{\mathcal{F}}\omega(y) = 0$ für alle $y \in L_b$ und s_b damit ein Zykel für alle $b \in B$. Die Abbildung $s(b) := [s_b]$ ist also ein glatter Schnitt in q^k .

Zur Umkehrung sei $s \in \Gamma^\infty(B, E^k, q^k)$ gegeben. Jedes $s(b) \in H^k(L_b)$ wird repräsentiert durch ein $s_b \in \Omega^k(L_b)$.

Definiere einen Repräsentanten $\omega \in \Omega^k(X, \mathcal{F})$ von $g^k(s) \in H^k(X, \mathcal{F})$ durch

$$\omega(x) := s_{p(x)}(x) \quad \forall x \in X.$$

ω ist glatt in x , da p glatt in x und s_b glatt in b ist.

Die Zykeleigenschaft von ω ergibt sich aus der Zykeleigenschaft von s_b für alle $b \in B$ als $d_{\mathcal{F}}\omega(x) = ds_{p(x)}(x) = 0$.

Die gerade konstruierten Abbildungen f^k und g^k sind invers zueinander und liefern somit den gewünschten Isomorphismus. \square

2.2.2 Folgerung Ist das Faserbündel p aus Satz 2.2.1 trivial, d.h. p eine Projektion $X = B \times L \xrightarrow{p_1} B$, dann gilt:

$$H^*(X, \mathcal{F}) \cong C^\infty(B) \otimes H^*(L).$$

Beweis: Wenn p trivial ist, so ist auch das zu p gehörige Kohomologiebündel q^* trivial und damit $E^* \cong B \times H^*(L)$.

Dadurch wird $\Gamma^\infty(B, E^*, q^*)$ zu $\Gamma^\infty(B, B \times H^*(L), \text{pr}_1) \cong C^\infty(B, H^*(L))$ und da $H^*(L)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist, gilt weiter $C^\infty(B, H^*(L)) \cong C^\infty(B) \otimes H^*(L)$. \square

Als Anwendung der gerade bewiesenen Folgerung auf unseren Fall ergibt sich die Blätterungskohomologie von $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ sofort als

$$\begin{aligned} H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong H^*(K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, K \times \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[) \\ &\cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(K \times]-1, -\frac{1}{2}[) \\ &\cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(K), \end{aligned}$$

da analog zu Beispiel 2.0.6

$$H^k(\mathbb{S}^1, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{S}^1) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

2.3 Kohomologie von $(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$

Nach Bemerkung 2.1.5 (b) ist die Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} auf $C \setminus N'$ durch das Faserbündel $F \rightarrow C \setminus N' \xrightarrow{\pi|_{C \setminus N'}} \mathbb{S}^1$ induziert. Satz 2.2.1 liefert dann als Blätterungskohomologie von $(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$

$$H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^*, q^*),$$

wobei $H^*(F) \rightarrow E^* \xrightarrow{q^*} \mathbb{S}^1$ das zu $\pi|_{C \setminus N'}$ gehörige Kohomologiebündel ist.

Da über das ursprüngliche Faserbündel π des gefaserten Knotens K nichts bekannt ist, kann auch über $\pi|_{C \setminus N'}$ und den daraus abgeleiteten Kohomologieraum $H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ nichts Genaueres gesagt werden.

Dennoch ist für die spätere Anwendung in der Mayer-Vietoris-Sequenz zusätzlich die Untersuchung der Mayer-Vietoris-Inklusion

$$j_{C \setminus N'} : N \cap C \setminus N' \hookrightarrow C \setminus N'$$

auf Kohomologieniveau wichtig. Die Einschränkung des Faserbündels $\pi|_{C \setminus N'}$ auf $N \cap C \setminus N'$ liefert gerade das triviale Faserbündel isomorph zu $K \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{S}^1$ und induziert eine Abbildung

$$\Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^*, q^*) \rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(K)$$

zwischen den Schnitten in den zugehörigen Kohomologiebündeln, die genau die gesuchte Abbildung

$$j_{C \setminus N'}^* : H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \rightarrow H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$$

ist.

Zumindest im Grad 0 findet man eine konkrete Beschreibung dieser Abbildung, die am Ende in die Formel für die Kohomologie von (C, \mathcal{K}_C^{sp}) eingesetzt werden kann und den Kohomologieraum im Grad 0 liefert.

2.3.1 Lemma *Es ist $H^0(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong H^0(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1)$ und $j_{C \setminus N'}^0 = id$.*

Beweis: Im Grad 0 gilt $H^0(K) \cong \mathbb{R}$ und damit

$$H^0(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes \mathbb{R} \cong C^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Nach Satz 2.2.1 ist zudem $H^0(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^0, q^0)$, wobei $H^0(F) \rightarrow E^0 \xrightarrow{q^0} \mathbb{S}^1$ das zu $F \rightarrow C \setminus N' \xrightarrow{\pi|_{C \setminus N'}} \mathbb{S}^1$ assoziierte Kohomologiebündel im Grad 0 ist.

Die Kartenwechsel von $\pi|_{C \setminus N'}$ seien die Diffeomorphismen

$$\varphi_{ij} : F \rightarrow F$$

für alle Indexpaare (i, j) von Karten von $\pi|_{C \setminus N'}$. Die Kartenwechsel von q^0 sind dann die induzierten Isomorphismen

$$H^0(\varphi_{ij}) : H^0(F) \rightarrow H^0(F).$$

Da $H^0(F) = \{f \in C^\infty(F) \mid f \text{ konstant}\} \cong \mathbb{R}$ ist, werden die Kartenwechsel von q^0 zu den Identitäten

$$\begin{aligned} H^0(\varphi_{ij}) : H^0(F) &\rightarrow H^0(F) . \\ f \equiv c &\mapsto f \circ \varphi_{ij} \equiv c \end{aligned}$$

Deshalb ist q^0 das triviale Bündel

$$H^0(F) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times H^0(F) \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{S}^1$$

und $H^0(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Das im Grad 0 zu $K \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow K \times \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{S}^1$ assoziierte Kohomologiebündel ist isomorph zu

$$H^0(K) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times H^0(K) \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{S}^1$$

und die Inklusion $j_{C \setminus N'}$ induziert auf den Kohomologiebündeln die Identität

$$id \times \iota^0 : S^1 \times H^0(F) \rightarrow S^1 \times H^0(K),$$

wobei $\iota : K \hookrightarrow \overline{F}$ die kanonische Inklusion des Abschlussrandes und folglich $\iota^0 : H^0(F) \rightarrow H^0(K)$ als Einschränkung von konstanten Abbildungen die Identität ist.

Die auf den Schnitten der Kohomologiebündel induzierte Abbildung $j_{C \setminus N'}^0 : H^0(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \rightarrow H^0(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ muss also ebenfalls die Identität sein. \square

2.4 Kohomologie von (N, \mathcal{K}_C^{sp})

Zur Berechnung von $H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp})$ wird eine Art Künneth-Formel für die randtriviale Blätterungskohomologie benötigt:

2.4.1 Satz Sei (M, \mathcal{F}) eine kompakte n -dimensionale geblätterte Mannigfaltigkeit und sei X eine kompakte m -dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand. Auf $M \times X$ sei die Blätterung $\mathcal{F} \times X$ gegeben, für den Rand gilt dann $\partial_\tau(M \times X) = \partial_\tau M \times X$. Ist die Blätterung \mathcal{F} – und damit automatisch auch $\mathcal{F} \times X$ – randtrivial, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H_{\partial_\tau(M \times X)}^*(M \times X, \mathcal{F} \times X) \cong H_{\partial_\tau M}^*(M, \mathcal{F}) \otimes H^*(X).$$

Beweis: Mostow hat bewiesen, dass jede (unberandete) n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer C^∞ -Blätterung der Kodimension q eine gute geblätterte Überdeckung besitzt, d.h. eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$, für die alle nicht-leeren endlichen Durchschnitte $U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_s}$ mit den jeweils induzierten Blätterungen diffeomorph zu $(\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q, \{\mathbb{R}^{n-q} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}^q})$ und damit blätterungshomotop zu $(\mathbb{R}^q, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}^q})$ sind [16].

Für die gegebene geblätterte Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) kann man mit einer Abwandlung der obigen Aussage für $q = 1$ und Mannigfaltigkeiten mit Rand arbeiten. Die geblätterten Überdeckungsdurchschnitte sind hier diffeomorph zu $(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}})$ (im Inneren von M), zu $(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}_+})$ (bei nichtleerem Durchschnitt mit $\partial_\tau M$) oder zu $(\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}, \{\mathbb{R}_+^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}})$ (bei nichtleerem Durchschnitt mit $\partial_{\text{fl}} M$) und damit blätterungshomotop zu $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}})$, zu $(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}_+})$ oder nochmal zu $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}})$.

Für die Mannigfaltigkeit X (mit trivialer C^∞ -Blätterung der Kodimension 0) stimmt der Begriff einer guten geblätterten Überdeckung mit der klassischen Definition einer guten Überdeckung überein.

Da M und X beide als kompakt vorausgesetzt sind, besitzen beide sogar eine endliche gute geblätterte Überdeckung und der Satz kann – völlig analog zur klassischen Künneth-Formel in der deRham-Kohomologie – durch eine doppelte Induktion nach den Kardinalitäten der beiden Überdeckungen bewiesen werden.

Einzig beim Induktionsanfang muss aufgrund der zwei homotopisch verschiedenen Typen von möglichen Überdeckungsdurchschnitten eine Fallunterscheidung gemacht werden, deren beide Fälle aber ganz analog zueinander sind:

Fall 1: Sei $(M_0, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}})$ und $X_0 = \mathbb{R}^m$ oder sei $(M_0, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R}, \{\mathbb{R}_+^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}})$ und $X_0 = \mathbb{R}^m$.

Dann ist

$$H^k(M_0, \mathcal{F}) \cong H^k(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$H^k(X_0) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} H^k(M_0 \times X_0, \mathcal{F} \times X_0) &= H^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\} \times \mathbb{R}^m\}_{x \in \mathbb{R}}) \\ &\cong H^k(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} H^k(M_0 \times X_0, \mathcal{F} \times X_0) &= H^k(\mathbb{R}_+^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \{\mathbb{R}_+^{n-1} \times \{x\} \times \mathbb{R}^m\}_{x \in \mathbb{R}}) \\ &\cong H^k(\mathbb{R}, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}}) = \begin{cases} C^\infty(\mathbb{R}) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \end{aligned}$$

in jedem Fall aber isomorph zu $(H^*(M_0, \mathcal{F}) \otimes H^*(X_0))^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Fall 2: Sei $(M_0, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}_+})$ und $X_0 = \mathbb{R}^m$.

Hier gilt

$$\begin{aligned} H_{\partial_\tau M_0}^k(M_0, \mathcal{F}) &= H_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\}\}_{x \in \mathbb{R}_+}) \\ &\cong H_{\{0\}}^k(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}_+}) = \begin{cases} C_0^\infty(\mathbb{R}_+) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit $C_0^\infty(\mathbb{R}_+) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \mid f^{(k)}(0) = 0 \forall k \geq 0\}$ und

$$H^k(X_0) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zugleich ist

$$\begin{aligned} & H_{\partial_r(M_0 \times X_0)}^k(M_0 \times X_0, \mathcal{F} \times X_0) \\ &= H_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \times \mathbb{R}^m}^k(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m, \{\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\} \times \mathbb{R}^m\}_{x \in \mathbb{R}_+}) \\ &\cong H_{\{0\}}^k(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}_0^{\mathbb{R}_+}) = \begin{cases} C_0^\infty(\mathbb{R}_+) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und damit isomorph zu $(H_{\partial_r M_0}^*(M_0, \mathcal{F}) \otimes H^*(X_0))^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. \square

Direkt lässt sich dieser Satz im vorliegenden Fall nicht anwenden, da N nicht kompakt ist. Allerdings ist $\partial \bar{N}$ transversal zu \mathcal{K}_C^{sp} , der geblätterte Abschluss

$$(\bar{N}, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong (K \times \mathbb{S}^1 \times [-1, 0], K \times (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times [-1, 0])^{sp})$$

von N ist also blätterungshomotopieäquivalent zu (N, \mathcal{K}_C^{sp}) und besitzt die gleiche randtriviale Blätterungskohomologie.

Mit dem Ziel $H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp})$ wählen wir also die geblätterte Mannigfaltigkeit (M, \mathcal{F}) als $(\mathbb{S}^1 \times [-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times [-1, 0])^{sp})$ mit dem tangentialen Rand $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ und die Mannigfaltigkeit X als K .

Zur Berechnung der Kohomologie von $(\mathbb{S}^1 \times [-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times [-1, 0])^{sp})$ gehen wir allerdings wieder auf die dazu blätterungshomotopieäquivalente geblätterte Mannigfaltigkeit $(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp})$ zurück, die in Abbildung 2.1 veranschaulicht ist.

Dabei springt eine weitere Mayer-Vietoris-Zerlegung ins Auge, die im Wesentlichen die \mathbb{S}^1 in zwei überlappende Halbkreise zerlegt:

Definiere für ein ausreichend kleines $\epsilon > 0$ die beiden Teilmengen

$$\mathbb{S}_l^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ und } \operatorname{Re}(z) < \epsilon\}$$

und

$$\mathbb{S}_r^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ und } \operatorname{Re}(z) > -\epsilon\}.$$

Der Durchschnitt $\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1$ dieser beiden Mengen lässt sich disjunkt zerlegen in $(\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, -\epsilon < \operatorname{Re}(z) < \epsilon \text{ und } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $(\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^- := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, -\epsilon < \operatorname{Re}(z) < \epsilon \text{ und } \operatorname{Im}(z) < 0\}$.

Dann ist

$$(\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0]) \cup (\mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0])$$

eine offene Zerlegung des Kreisrings $\mathbb{S}^1 \times]-1, 0]$ mit dem Durchschnitt $(\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0] = ((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^+ \times]-1, 0]) \dot{\cup} ((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^- \times]-1, 0])$.

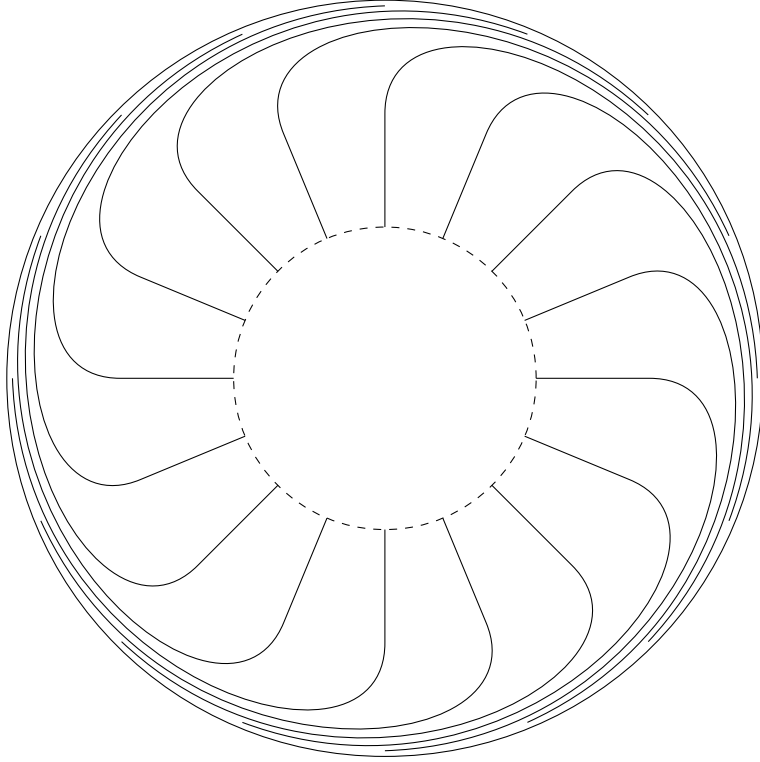


Abbildung 2.1: Der geblätterte Kreisring $(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0])$, $(\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$.

Die von $(\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$ induzierten Blätterungen auf den Mayer-Vietoris-Unterräumen $\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0]$ und $\mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0]$ sind

$$\mathcal{F}_l := (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])_{|\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0]}^{sp} \cong (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}_l^1} \times]-1, 0])^{sp}$$

und

$$\mathcal{F}_r := (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])_{|\mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0]}^{sp} \cong (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}_r^1} \times]-1, 0])^{sp}.$$

Auf dem Mayer-Vietoris-Durchschnitt werden dementsprechend die Blätterungen

$$\mathcal{F}_{l,r} := (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])_{|(\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0]}^{sp} \cong (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1} \times]-1, 0])^{sp}$$

und

$$\mathcal{F}_{l,r,-} := (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])_{|(S_t^1 \cap S_r^1)^- \times]-1, 0]}^{sp} \cong (\mathcal{F}_0^{(S_t^1 \cap S_r^1)^-} \times]-1, 0])^{sp}$$

bzw.

$$\mathcal{F}_{l,r,+} := (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])_{|(S_t^1 \cap S_r^1)^+ \times]-1, 0]}^{sp} \cong (\mathcal{F}_0^{(S_t^1 \cap S_r^1)^+} \times]-1, 0])^{sp}$$

induziert.

Die beiden geblätterten Mayer-Vietoris-Unterräume sind diffeomorph zu $(]-1, 1[\times]-1, 0])$, $(\mathcal{F}_0^{]-1, 1[} \times]-1, 0])^{sp}$.

Durch die guten Eigenschaften der eindrehenden Abbildung $\rho \in C^\infty(]-1, 0])$ aus Lemma 1.1.3, nämlich $\rho \equiv 0$ auf $]-1, -\frac{1}{2}]$, ρ streng monoton steigend von 0 auf 1 auf $[-\frac{1}{2}, 0]$ und ρ C^∞ -tangential an die Konstante $c \equiv 1$ auf $]-1, 0]$ in 0, ist das halboffene Geradenstück

$$T := \{\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b \mid 0 \leq \lambda < 1\}$$

in $]-1, 1[\times]-1, 0]$ mit den Endpunkten $a := (1, -\frac{1}{2}) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$ und $b := (x, 0) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$ für jedes $x \in]-1, 1[$ eine totale Transversale zu der Blätterung $(\mathcal{F}_0^{]-1, 1[} \times]-1, 0])^{sp}$. Zusätzlich ist dieses T mit der induzierten Blätterung $(\mathcal{F}_0^{]-1, 1[} \times]-1, 0])_T^{sp}$ sogar ein Blätterungsretrakt für $(]-1, 1[\times]-1, 0])$, $(\mathcal{F}_0^{]-1, 1[} \times]-1, 0])^{sp}$, was auch in Abbildung 2.2 zu sehen ist.

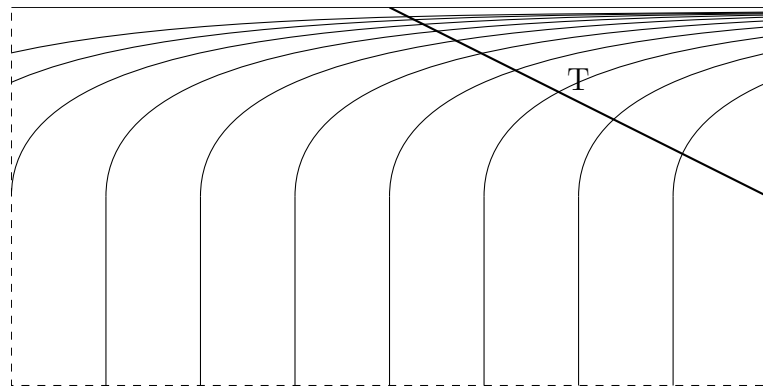


Abbildung 2.2: Die totale Transversale auf dem Mayer-Vietoris-Unterraum $(]-1, 1[\times]-1, 0])$, $(\mathcal{F}_0^{]-1, 1[} \times]-1, 0])^{sp}$.

Da die geblätterte Transversale $(T, (\mathcal{F}_0^{]-1,1[\times]-1,0])_{|T}^{sp})$ diffeomorph zu $(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]})$ ist, gilt für die randtriviale Blätterungskohomologie der Mayer-Vietoris-Unterräume

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{S}_l^1 \times \{0\}}^k(\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0], \mathcal{F}_l) &\cong H_{\mathbb{S}_r^1 \times \{0\}}^k(\mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0], \mathcal{F}_r) \\ &\cong H_{\{0\}}^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) = \begin{cases} C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

mit

$$C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) := \{f \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) \mid f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \geq 0\}.$$

Der geblätterte Mayer-Vietoris-Durchschnitt ist diffeomorph zu zwei disjunkten Kopien von $(]-1, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1,1[\times]-1,0])^{sp})$ bzw. blätterungsretrahierbar auf zwei disjunkte Kopien von $(T, (\mathcal{F}_0^{]-1,1[\times]-1,0])_{|T}^{sp})$ und damit ist die randtriviale Blätterungskohomologie des Mayer-Vietoris-Durchschnitts

$$\begin{aligned} H_{(\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times \{0\}}^k((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0], \mathcal{F}_{l,r}) \\ \cong H_{\{0\}}^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) \oplus H_{\{0\}}^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) = \begin{cases} C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Zur Untersuchung der Mayer-Vietoris-Inklusionen

$$j_{\mathbb{S}_l^1 \times]-1,0]} : (\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0] \hookrightarrow \mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0]$$

und

$$j_{\mathbb{S}_r^1 \times]-1,0]} : (\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0] \hookrightarrow \mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0]$$

in der Kohomologie muss nun die Beziehung der einzelnen Retrakte zueinander geklärt werden (siehe auch Abbildung 2.3).

Für die Betrachtung der ersten Inklusion $j_{\mathbb{S}_l^1 \times]-1,0]}$ soll $(\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0], \mathcal{F}_l)$ noch einmal mit $(]-1, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1,1[\times]-1,0])^{sp})$ identifiziert werden, die beiden disjunkten geblätterten Mayer-Vietoris-Durchschnittshälften $((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^- \times]-1, 0], \mathcal{F}_{l,r,-})$ und $((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1)^+ \times]-1, 0], \mathcal{F}_{l,r,+})$ können dann passend dazu mit $(]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1,0])^{sp})$ und $(\frac{1}{2}, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]\frac{1}{2}, 1[\times]-1,0])^{sp})$ identifiziert werden.

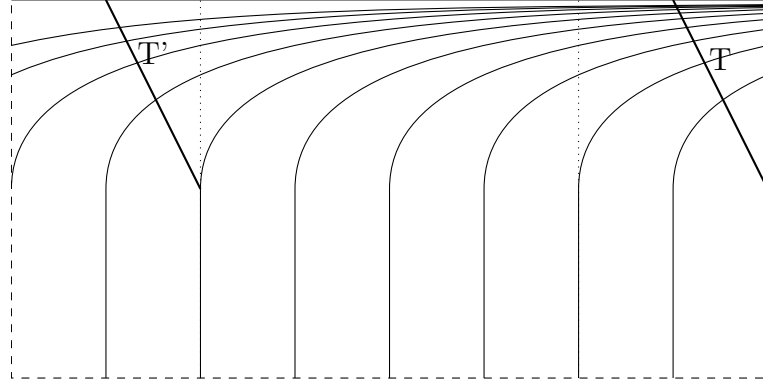


Abbildung 2.3: Die Transversalen auf dem Mayer-Vietoris-Unterraum $(]-1, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0])^{sp}$ mit den Mayer-Vietoris-Durchschnitthälften $(]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1, 0])^{sp}$ und $(] \frac{1}{2}, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{] \frac{1}{2}, 1[\times]-1, 0])^{sp}$.

Es ist möglich, dass $(]-1, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0])^{sp}$ und die rechte Durchschnitthälfte $(] \frac{1}{2}, 1[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{] \frac{1}{2}, 1[\times]-1, 0])^{sp}$ auf die gleiche geblätterte totale Transversale

$$(T := \{\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b \mid 0 \leq \lambda < 1\}, (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0])_{|T}^{sp})$$

mit $a := (1, -\frac{1}{2}) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$ und $b := (x, 0) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$ für jedes $x \in] \frac{1}{2}, 1[$ retrahiert werden. Die Mayer-Vietoris-Inklusion liefert in diesem Fall also eine Identität der Retrakte.

Für die linke Durchschnitthälfte $(]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{]-1, -\frac{1}{2}[\times]-1, 0])^{sp}$ kann man als Retrakt die geblätterte totale Transversale

$$(T' := \{\lambda \cdot a' + (1 - \lambda) \cdot b' \mid 0 \leq \lambda < 1\}, (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0])_{|T'}^{sp})$$

mit $a' := (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$, $b' := (x', 0) \in]-1, 1[\times]-1, 0]$ und $x' := x - \frac{3}{2}$ wählen, so dass die Mayer-Vietoris-Inklusion hier einer Verschiebung s von T' entlang der Blätter auf T entspricht. Identifiziert man jetzt noch $(T, (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0])_{|T}^{sp})$ und $(T', (\mathcal{F}_0^{]-1, 1[\times]-1, 0})_{|T'}^{sp})$ jeweils mit $(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]})$, so stellt sich diese Verschiebung als eine glatte Funktion

$$s :]-\frac{1}{2}, 0] \rightarrow]-\frac{1}{2}, 0]$$

dar.

Die wichtigsten Eigenschaften von s folgen direkt aus den Eigenschaften der eindrehenden Abbildung $\rho \in C^\infty(]--1, 0])$ aus Lemma 1.1.3 und sind diesen in Abbildung 2.4 graphisch gegenübergestellt.

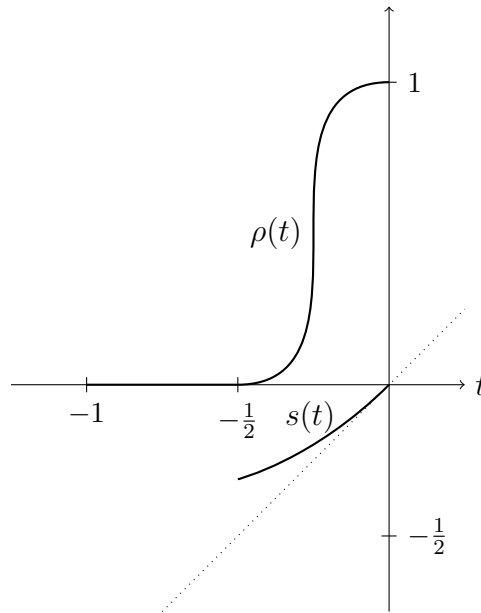


Abbildung 2.4: Die eindrehende Abbildung ρ und die Funktion s .

2.4.2 Lemma

(1) $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$, $s^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \geq 2$.

(2) s ist auf $]-\frac{1}{2}, 0]$ streng monoton steigend von $y \in]-\frac{1}{2}, 0[$ auf 0.

(3) s' ist auf $]-\frac{1}{2}, 0]$ streng monoton steigend von $y' \in]0, 1[$ auf 1.

Beweis: Sei $]-1, 1[\times]-1, 0]$ durch (x, t) parametrisiert.

Die eingedrehte Blätterung $(\mathcal{F}_0^{-1,1} \times]-1, 0])^{sp}$ auf $]-1, 1[\times]-1, 0]$ ist nach dem Beweis zu Lemma 1.1.3 durch die 1-Form

$$\theta = (1 - \rho(t)) \cdot \omega + \rho(t) \cdot dt$$

gegeben, wobei ω die definierende 1-Form dx der induzierten Blätterung $(\mathcal{F}_0^{-1,1} \times]-1, 0])_{]-1, 1[\times \{0\}}$ auf dem Rand $]-1, 1[\times \{0\}$ ist. θ kann durch dt glatt auf $]-1, 1[\times]-1, 1[$ fortgesetzt werden, deshalb muss s durch die Identität glatt auf $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ fortgesetzt werden können, d.h. s ist in 0 C^∞ -tangential an die Identität. Das beweist (1).

Das zu θ gehörige Blätterungsvektorfeld auf $] -1, 1[\times] -1, 0[$ kann auf dem Teilraum $] -1, 1[\times] -\frac{1}{2}, 0[$ durch

$$X = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1 - \rho(t)}{\rho(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$$

beschrieben werden. Der Koeffizient $\frac{1-\rho(t)}{\rho(t)}$ von $\frac{\partial}{\partial t}$ ist dabei eine glatte Funktion auf $] -\frac{1}{2}, 0[$. Sie ist auf $] -\frac{1}{2}, 0[$ strikt positiv, was (2) zeigt, und auf $] -\frac{1}{2}, 0[$ streng monoton fallend von ∞ auf 0, woraus (3) folgt. \square

Die Funktion s hat außerdem eine glatte Fortsetzung auf $[-\frac{1}{2}, 0]$, die wieder s genannt werden soll und die ebenfalls die obigen drei Eigenschaften (mit $[-\frac{1}{2}, 0]$ anstelle von $] -\frac{1}{2}, 0[$) besitzt.

Für spätere Beweise ist besonders eine weitere Folgerung über s hilfreich:

2.4.3 Lemma $\lim_{m \rightarrow \infty} s^m = 0$, wobei s^m die m -fache Iteration $\underbrace{s \circ s \circ \dots \circ s}_{m\text{-mal}}$ von s bezeichnet.

Beweis: Betrachte die Folge $(s^m(-\frac{1}{2}))_{m \in \mathbb{N}}$. Sie ist beschränkt und streng monoton steigend, besitzt also einen Grenzwert in $] -\frac{1}{2}, 0[$.

Es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s^m(-\frac{1}{2}) = \lim_{m \rightarrow \infty} s^{m+1}(-\frac{1}{2}) = s(\lim_{m \rightarrow \infty} s^m(-\frac{1}{2})),$$

und da 0 der einzige Fixpunkt von s ist, muss $\lim_{m \rightarrow \infty} s^m(-\frac{1}{2}) = 0$ sein.

Für die Funktionenfolge $(s^m)_{m \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\text{im}(s^m) =]s^m(-\frac{1}{2}), 0],$$

deshalb ist $\lim_{m \rightarrow \infty} s^m = 0$. \square

Interessiert man sich für die zweite Mayer-Vietoris-Inklusion $j_{\mathbb{S}_r^1 \times] -1, 0[}$, muss man nur die Rollen der rechten und linken Durchschnitthälfte vertauschen.

und

$$\begin{aligned} \text{im}(j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0 - j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0) &= \{(p, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 \mid p = f - g \circ s, q = f \circ s - g \\ &\quad \text{für ein } f, g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\}. \end{aligned}$$

p kann beliebig aus $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ gewählt werden, für q gilt dann

$$q = p \circ s + g \circ s^2 - g \text{ für ein } g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]),$$

also

$$\begin{aligned} \text{im}(j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0 - j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0) &= \{(p, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 \mid q = p \circ s + g \circ s^2 - g \\ &\quad \text{für ein } g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{koker}(j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0 - j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^0) &= \{(p, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2\} / \{(p, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 \mid \\ &\quad q = p \circ s + g \circ s^2 - g \text{ für ein } g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\} \\ &\cong \{(0, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2\} / \{(0, q) \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 \mid \\ &\quad q = g \circ s^2 - g \text{ für ein } g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\} \\ &\cong C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \end{aligned}$$

mit $Q_0 := \{q \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) \mid q = g \circ s^2 - g \text{ für ein } g \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\}$.

Die randtriviale Blätterungskohomologie von $(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$ ist also

$$\begin{aligned} &H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}^k(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0 \times]-1, 0])^{sp}) \\ &\cong \text{koker}(j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^{k-1} - j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^{k-1}) \oplus \ker(j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^k - j_{\mathbb{S}_t^1 \times]-1,0]}^k) \\ &\cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 & k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Nach Satz 2.4.1 ist jetzt die Berechnung der randtrivialen Blätterungskohomologie von (N, \mathcal{K}_C^{sp}) möglich:

$$\begin{aligned} H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times K}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0] \times K, (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} \times K) \\ &\cong H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}) \otimes H^*(K), \end{aligned}$$

das heißt

$$H_{\partial C}^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \otimes H^{k-1}(K)$$

für $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Im Hinblick auf die Berechnung von $H_{\partial C}^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ muss als Letztes noch die Mayer-Vietoris-Inklusion

$$j_N : N \cap C \setminus N' \hookrightarrow N$$

auf ihre Wirkung in der Kohomologie hin untersucht werden.

Neben der Interpretation von $N \cap C \setminus N'$ als triviales Faserbündel über der \mathbb{S}^1 und der Anwendung von Folgerung 2.2.2 hätte auch das für die Berechnung von $H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp})$ genutzte Resultat aus Satz 2.4.1 die Blätterungskohomologie von $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ geliefert, nämlich durch

$$\begin{aligned} H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K) \\ &\cong H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[) \otimes H^*(K) \\ &\cong H^*(\mathbb{S}^1, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1}) \otimes H^*(K) \\ &= C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(K). \end{aligned}$$

Bei dieser Betrachtungsweise ist die gesuchte Kohomologieabbildung j_N^* leicht zu identifizieren:

Sei $\iota : \mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\hookrightarrow \mathbb{S}^1 \times]-1, 0]$ die kanonische Inklusion, dann ist j_N^* durch das folgende kommutative Diagramm festgelegt:

$$\begin{array}{ccc} H_{\partial C}^*(N, \mathcal{K}_C^{sp}) & \xrightarrow{j_N^*} & H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\} \times K}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0] \times K, (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} \times K) & \xrightarrow{(\iota \times \text{id}_K)^*} & H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}) \otimes H^*(K) & \xrightarrow{\iota^* \otimes \text{id}_{H^*(K)}} & H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[) \otimes H^*(K) \end{array}$$

Da $(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[)$ nur im Grad 0 nichttriviale Kohomologie besitzt, genügt es schon, die Abbildung ι^* im Grad 0 zu kennen. Weil aber $H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$ gerade im Grad 0 trivial ist, ist ι^0 und damit j_N^* die Nullabbildung.

2.5 Mayer-Vietoris-Sequenz

Nachdem die randtrivialen Blätterungskohomologiegruppen aller beteiligten Räume der Mayer-Vietoris-Zerlegung von C und die von den Mayer-Vietoris-Inklusionen induzierten Kohomologieabbildungen ermittelt sind, kann nun die Mayer-Vietoris-Sequenz für die randtriviale Blätterungskohomologie von (C, \mathcal{K}_C^{sp}) aufgestellt werden:

$$\begin{array}{c}
 \dots \xrightarrow{j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}} H^{k-1}(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\
 \xrightarrow{\quad} H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \longrightarrow H_{\partial C}^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \oplus H^k(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \xrightarrow{j_N^k - j_{C \setminus N'}^k} H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\
 \xrightarrow{\quad} H_{\partial C}^{k+1}(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Interessant für die Berechnung der Kohomologiegruppen von (C, \mathcal{K}_C^{sp}) sind für alle $0 \leq k \leq 2n$ Kern, Bild und Kokern der Abbildung $j_N^k - j_{C \setminus N'}^k$.

Legt man die zuvor bereits ermittelten Isomorphismen $H_{\partial C}^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \otimes H^{k-1}(K)$, $H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^*, q^*)$ und $H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^k(K)$ zugrunde, dann erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned}
 j_N^k - j_{C \setminus N'}^k : H_{\partial C}^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \oplus H^k(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) &\rightarrow H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\
 (\bar{f} \otimes \eta, \sigma) &\mapsto -j_{C \setminus N'}^k(\sigma)
 \end{aligned}$$

mit $\bar{f} \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0$, $\eta \in H^{k-1}(K)$ und $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^k, q^k)$. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \otimes H^{k-1}(K) \oplus \ker(j_{C \setminus N'}^k) \\
 \text{im}(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong \text{im}(j_{C \setminus N'}^k) \\
 \text{koker}(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^k(K)) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^k)
 \end{aligned}$$

Da K eine geschlossene $(2n - 1)$ -Mannigfaltigkeit ist, gilt nach Anwendung der Poincaré-Dualität für die Kohomologie

$$H^k(K) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \mathbb{R}^{\mu_k} & k = 1, \dots, n-1 \\ \mathbb{R}^{\mu_{2n-k-1}} & k = n, \dots, 2n-2 \\ \mathbb{R} & k = 2n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zum Zwecke einer einheitlichen Bezeichnung der folgenden Resultate sei zusätzlich $\mu_0 := 1$, $\mu_{-1} := 0$ und $\mu_n := \mu_{n-1}$.

Es ist also unter Berücksichtigung von Lemma 2.3.1 und mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} A_l &:= (C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0)^{\mu_l} \\ B_k &:= \ker(j_{C \setminus N'}^k) \\ C_{k,l} &:= (C^\infty(\mathbb{S}^1))^{\mu_l} / \text{im}(j_{C \setminus N'}^k) \end{aligned}$$

$$\ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ A_{k-1} \oplus B_k & k = 1, \dots, n \\ A_{2n-k} \oplus B_k & k = n+1, \dots, 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\text{koker}(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ C_{k,k} & k = 1, \dots, n-1 \\ C_{k,2n-k-1} & k = n, \dots, 2n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Für die gesuchten Kohomologieräume gilt damit

$$\begin{aligned} H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong \text{koker}(j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}) \oplus \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \\ &\cong (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^{k-1}(K)) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1}) \\ &\quad \oplus C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \otimes H^{k-1}(K) \oplus \ker(j_{C \setminus N'}^k) \end{aligned}$$

$$\cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ A_0 \oplus B_1 & k = 1 \\ C_{k-1,k-1} \oplus A_{k-1} \oplus B_k & k = 2, \dots, n \\ C_{k-1,2n-k} \oplus A_{2n-k} \oplus B_k & k = n+1, \dots, 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Im Fall einer speziellen Knotenblätterung, also wenn $K = \mathbb{S}^{2n-1}$, sind in $H^*(K)$ alle Indizes μ_k für $k = 1, \dots, n-1$ gleich 0 und die randtriviale Blätterungskohomologie des Knotentubenkomplements (C, \mathcal{K}_C^{sp}) ergibt sich als

$$H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \oplus \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^1, q^1) & k = 1 \\ \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^k, q^k) & k = 2, \dots, 2n-2 \\ \ker(j_{C \setminus N'}^{2n-1}) & k = 2n-1 \\ C^\infty(\mathbb{S}^1) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{2n-1}) \oplus C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \oplus \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^{2n}, q^{2n}) & k = 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist zusätzlich das Faserbündel π des speziellen Knotens eine einfache Projektion auf die \mathbb{S}^1 , wie sie sich im Spezialfall aus Beispiel 1.2.3 ergibt, so gilt

$$H^*(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^*(\mathbb{D}^{2n}).$$

Da $H^k(\mathbb{D}^{2n}) = 0$ für alle $k \geq 1$ ist, vereinfacht sich die obige Kohomologie zu

$$H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \begin{cases} 0 & k = 0 \\ C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 & k = 1 \\ 0 & k = 2, \dots, 2n-1 \\ C^\infty(\mathbb{S}^1) \oplus C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 & k = 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.6 Dimensionen der Kohomologieräume

Für einen Vergleich der gerade berechneten randtrivialen Blätterungskohomologie von (C, \mathcal{K}_C^{sp}) mit der Kohomologie von $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$, der unter anderem zur zentralen Aussage über die Dimensionen der Blätterungskohomologieräume von $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ führt, muss eine weitere Variante der Blätterungsdifferentialformen definiert werden.

2.6.1 Definition Sei (M, \mathcal{F}) eine geblätterte n -Mannigfaltigkeit und $(N, \mathcal{F}_N) \subset (M, \mathcal{F})$ eine geblätterte n -Untermannigfaltigkeit, so dass der Rand des abgeschlossenen Komplements $\partial M \setminus N$ eine Vereinigung von Blättern von \mathcal{F} ist. Dann sei $\Omega_N^*(M, \mathcal{F})$ der Unterkomplex von $\Omega^*(M, \mathcal{F})$

der auf N identisch verschwindenden Blätterungs-differentialformen auf M , bzw.

$$\Omega_N^*(M, \mathcal{F}) := \{\omega \in \Omega^*(M, \mathcal{F}) \mid \omega|_N \equiv 0\}.$$

Die zugehörige Kohomologie von $\Omega_N^*(M, \mathcal{F})$ soll mit $H_N^*(M, \mathcal{F})$ bezeichnet werden.

2.6.2 Bemerkung Ist die von \mathcal{F} induzierte Blätterung auf $\overline{M \setminus N}$ randtriviale, so liefert jede Differentialform aus $\Omega_N^*(M, \mathcal{F})$ durch Einschränkung auf $\overline{M \setminus N}$ ein Element aus $\Omega_{\partial \overline{M \setminus N}}^*(\overline{M \setminus N})$ und umgekehrt kann man jede randtriviale Blätterungs-differentialform aus $\Omega_{\partial \overline{M \setminus N}}^*(\overline{M \setminus N})$ durch 0 auf ganz M fortsetzen und erhält damit eine Form aus $\Omega_N^*(M, \mathcal{F})$. Diese beiden Zuordnungen sind invers zueinander und es ist

$$H_{\partial \overline{M \setminus N}}^*(\overline{M \setminus N}, \mathcal{F}) \cong H_N^*(M, \mathcal{F}).$$

Für den vorliegenden Fall sei $M := \mathbb{S}^{2n+1}$ mit der gegebenen Knotenblätterung \mathcal{K} und $N := T(K)$ mit der induzierten Blätterung $\mathcal{K}_{T(K)}$. $\overline{M \setminus N}$ ist dann genau das abgeschlossene Knotentubenkomplement C mit der induzierten Blätterung \mathcal{K}_C^{sp} .

Für jetzt bezeichne $r : \Omega^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K}) \hookrightarrow \Omega^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ die durch die Inklusion $C \hookrightarrow \mathbb{S}^{2n+1}$ induzierte Einschränkung der Blätterungs-differentialformen. Außerdem seien $\psi_C : \Omega_{\partial C}^*(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \hookrightarrow \Omega^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ und $\psi_{\mathbb{S}^{2n+1}} : \Omega_{T(K)}^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K}) \hookrightarrow \Omega^*(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ die Inklusionen der entsprechenden Unterkomplexe in den Blätterungs-differentialformen. Dann ist das folgende Kohomologiediagramm für alle $k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) & \xrightarrow{\psi_C^k} & H^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \\ \cong \downarrow & & \uparrow r^k \\ H_{T(K)}^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K}) & \xrightarrow{\psi_{\mathbb{S}^{2n+1}}^k} & H^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K}) \end{array}$$

Ist nun $\dim(\text{im}(\psi_C^k)) = \infty$, so ist auch $\dim(\text{im}(\psi_{\mathbb{S}^{2n+1}}^k)) = \infty$ und damit wäre das gewünschte Resultat $\dim(H^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})) = \infty$ erreicht.

Die Frage nach der Unendlichdimensionalität der Kohomologieräume hat sich also von der (in Teilen nach Definition unbekannt) Blätterungskohomologie von $(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})$ in die Blätterungskohomologie von (C, \mathcal{K}_C^{sp}) verlagert und kann hier beantwortet werden.

Es bleibt jetzt noch, die (normale) Blätterungskohomologie $H^*(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ zu bestimmen, die Kohomologieabbildung ψ_C^* zu untersuchen und die Dimensionen ihrer Bildräume zu ermitteln.

2.6.3 Satz *Unter Verwendung der Abkürzungen*

$$\begin{aligned} A'_l &:= (C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q)^{\mu_l} \\ B'_{k,l} &:= (j_{C \setminus N'}^k)^{-1}(\mathbb{R}^{\mu_l}) \\ C'_{k,l} &:= (C^\infty(\mathbb{S}^1))^{\mu_l} / (\mathbb{R}^{\mu_l} - \text{im}(j_{C \setminus N'}^k)) \end{aligned}$$

gilt für die Blätterungskohomologie von (C, \mathcal{K}_C^{sp})

$$H^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ C'_{k-1, k-1} \oplus A'_0 \oplus B'_{1,1} & k = 1 \\ C'_{k-1, 2n-k} \oplus A'_{k-1} \oplus B'_{k,k} & k = 2, \dots, n \\ C'_{k-1, 2n-k} \oplus A'_{2n-k} \oplus B'_{k, 2n-k-1} & k = n + 1, \dots, 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit den gleichen Bezeichnungen wie im randtrivialen Fall und der analogen Definition

$$Q := \{q \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) \mid q = g \circ s^2 - g \text{ für ein } g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])\}.$$

Beweis: Natürlich gelten Satz 2.1.3 und Bemerkung 2.1.4 über die (Spaltungen der) Mayer-Vietoris-Sequenz auch für die normale Blätterungskohomologie.

Die Mayer-Vietoris-Zerlegung von C und die zugehörigen Mayer-Vietoris-Inklusionen seien die gleichen und auch gleich bezeichnet wie bei der Berechnung der randtrivialen Blätterungskohomologie.

Für den Mayer-Vietoris-Durchschnitt $(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ und den Mayer-Vietoris-Unterraum $(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp})$ sind randtriviale und normale Blätterungskohomologie nach Bemerkung 2.1.2 gleich und die Berechnungen sind bereits erledigt. Ebenso stimmen die von der Inklusion $j_{C \setminus N'} : N \cap C \setminus N' \hookrightarrow C \setminus N'$ induzierten Kohomologieabbildungen überein.

Bei der Blätterungskohomologie von (N, \mathcal{K}_C^{sp}) ergeben sich dagegen einige Änderungen zur randtrivialen Blätterungskohomologie.

Zunächst kann man feststellen, dass Satz 2.4.1 auch für die normale Blätterungskohomologie gilt, in unserem Fall also

$$\begin{aligned} H^*(N, \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0] \times K, (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} \times K) \\ &\cong H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}) \otimes H^*(K). \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Faktors $H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$) kann man die gleiche Mayer-Vietoris-Zerlegung verwenden wie für $H_{\mathbb{S}^1 \times \{0\}}^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}$). Die Blätterungskohomologie der Mayer-Vietoris-Unterräume und des Mayer-Vietoris-Durchschnitts ist jetzt analog

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{S}_l^1 \times]-1, 0], \mathcal{F}_l) &\cong H^k(\mathbb{S}_r^1 \times]-1, 0], \mathcal{F}_r) \\ &\cong H^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) = \begin{cases} C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} H^k((\mathbb{S}_l^1 \cap \mathbb{S}_r^1) \times]-1, 0], \mathcal{F}_{l,r}) \\ \cong H^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) \oplus H^k(]-\frac{1}{2}, 0], \mathcal{F}_0^{]-\frac{1}{2}, 0]}) \cong \begin{cases} C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])^2 & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Außerdem induzieren die Mayer-Vietoris-Inklusionen mit Hilfe der gleichen Funktion s wie im randtrivialen Fall die analogen Abbildungen in der normalen Blätterungskohomologie und die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert am Ende

$$H^k(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q & k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

wobei Q analog zu Q_0 wie in der Behauptung des Satzes definiert wird. Für die Blätterungskohomologie von (N, \mathcal{K}_C^{sp}) bedeutet das

$$H^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong H^k(K) \oplus C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q \otimes H^{k-1}(K).$$

Die von der Inklusion $j_N : N \cap C \setminus N' \hookrightarrow N$ induzierte Blätterungskohomologieabbildung ergibt sich hier analog zum randtrivialen Fall aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*(N, \mathcal{K}_C^{sp}) & \xrightarrow{j_N^*} & H^*(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0] \times K, (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp} \times K) & \xrightarrow{(\iota \times \text{id}_K)^*} & H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[\times K) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, 0], (\mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, 0])^{sp}) \otimes H^*(K) & \xrightarrow{\iota^* \otimes \text{id}_{H^*(K)}} & H^*(\mathbb{S}^1 \times]-1, -\frac{1}{2}[, \mathcal{F}_0^{\mathbb{S}^1} \times]-1, -\frac{1}{2}[) \otimes H^*(K) \end{array}$$

und ι^0 ist in diesem Fall die Inklusion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\hookrightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1) . \\ c &\mapsto f \equiv c \end{aligned}$$

Verwendet man jetzt noch die Isomorphismen $H^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \cong H^k(K) \oplus C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q \otimes H^{k-1}(K)$ und $H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \cong C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^k(K)$, dann hat j_N^k für $k = 0, 1, \dots, 2n$ die Darstellung

$$\begin{aligned} j_N^k : H^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) &\rightarrow H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\ (\omega, \bar{f} \otimes \eta) &\mapsto 1 \otimes \omega \end{aligned}$$

mit $\omega \in H^k(K)$, $\bar{f} \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q$ und $\eta \in H^{k-1}(K)$.

In der Mayer-Vietoris-Sequenz für (C, \mathcal{K}_C^{sp}) betrachtet man also für alle $0 \leq k \leq 2n$ die Abbildung

$$\begin{aligned} j_N^k - j_{C \setminus N'}^k : H^k(N, \mathcal{K}_C^{sp}) \oplus H^k(C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) &\rightarrow H^k(N \cap C \setminus N', \mathcal{K}_C^{sp}) \\ ((\omega, \bar{f} \otimes \eta), \sigma) &\mapsto 1 \otimes \omega - j_{C \setminus N'}^k(\sigma) \end{aligned}$$

mit $\omega \in H^k(K)$, $\bar{f} \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q$, $\eta \in H^{k-1}(K)$ und $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, E^k, q^k)$ und erhält für Kern, Bild und Kokern die Räume

$$\begin{aligned} \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q \otimes H^{k-1}(K) \oplus (j_{C \setminus N'}^k)^{-1}(H^k(K)) \\ \operatorname{im}(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong H^k(K) - \operatorname{im}(j_{C \setminus N'}^k) \\ \operatorname{koker}(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) &\cong (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^k(K)) / (H^k(K) - \operatorname{im}(j_{C \setminus N'}^k)) \end{aligned}$$

$H^k(K)$ wird dabei als Abkürzung für den Untervektorraum $\{1\} \otimes H^k(K)$ der konstanten Schnitte in $C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^k(K) \cong \Gamma^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 \times H^k(K), \operatorname{pr}_1)$ verwendet.

Mit Hilfe der angegebenen Abkürzungen ergibt sich daraus die Behauptung des Satzes. \square

2.6.4 Lemma

$$Q_0 < Q \leq C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) < C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$$

ist eine Kette von Untervektorräumen.

Beweis: Q_0 ist natürlich ein Untervektorraum von Q .

Sei $q \in Q$ mit $q = g - g \circ s^2$ für ein festes $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$. Angenommen $q \in Q_0$, dann muss $q = f - f \circ s^2$ für ein $f \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ gelten, also $f - g = (f - g) \circ s^2$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} s^{2n} = 0$ ist, muss $f - g$ eine Konstante sein, insbesondere gilt $g^{(m)}(0) = f^{(m)}(0) = 0$ für alle $m \geq 1$. Das ist aber nicht für jedes $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ erfüllt. Im Allgemeinen ist deshalb $q \notin Q_0$ und Q_0 ein echter Untervektorraum von Q .

Wähle nochmal $q \in Q$, dann gibt es ein $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ mit $q = g - g \circ s^2$. Die Funktion s ist in 0 C^∞ -tangential an die Identität, womit q in 0 C^∞ -tangential an die Nullfunktion und damit aus $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ ist. Dass $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ ein echter Untervektorraum von $C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ ist, ist wieder klar. \square

Zur Untersuchung von $\psi_C^k : H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) \rightarrow H^k(C, \mathcal{K}_C^{sp})$ sei nochmal an die Darstellung der beteiligten Kohomologieräume erinnert:

$$\begin{aligned} H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong \text{koker}(j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}) \oplus \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \\ &\cong (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^{k-1}(K)) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1}) \\ &\quad \oplus C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 \otimes H^{k-1}(K) \oplus \ker(j_{C \setminus N'}^k) \\ H^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) &\cong \text{koker}(j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}) \oplus \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \\ &\cong (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^{k-1}(K)) / (H^{k-1}(K) - \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1})) \\ &\quad \oplus C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q \otimes H^{k-1}(K) \oplus (j_{C \setminus N'}^k)^{-1}(H^k(K)) \end{aligned}$$

Die zugehörigen spaltenden kurzen exakten Sequenzen fügen sich zusammen mit ψ_C^k in das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{koker}(j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}) & \longrightarrow & H_{\partial C}^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) & \longrightarrow & \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{proj} & & \downarrow \psi_C^k & & \downarrow (\alpha \otimes \text{id}) \oplus \text{incl} \\ 0 & \longrightarrow & \text{koker}(j_N^{k-1} - j_{C \setminus N'}^{k-1}) & \longrightarrow & H^k(C, \mathcal{K}_C^{sp}) & \longrightarrow & \ker(j_N^k - j_{C \setminus N'}^k) \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit

$$\text{proj} : (C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^{k-1}(K)) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1}) \rightarrow \frac{(C^\infty(\mathbb{S}^1) \otimes H^{k-1}(K)) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1})}{(H^{k-1}(K) - \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1})) / \text{im}(j_{C \setminus N'}^{k-1})}$$

und

$$\text{incl} : (j_{C \setminus N'}^k)^{-1}(0) \hookrightarrow (j_{C \setminus N'}^k)^{-1}(H^k(K))$$

die natürliche Projektion bzw. Inklusion und

$$\begin{aligned} \alpha : C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q_0 &\rightarrow C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) / Q . \\ \bar{f} &\mapsto \bar{f} \end{aligned}$$

Wenn $\dim(\text{im}(\alpha \otimes \text{id})) = \infty$ ist, dann ist auch $\dim(\text{im}(\psi_C^k)) = \infty$. Dabei ist $\dim(\text{im}(\alpha \otimes \text{id})) = \infty$ genau dann, wenn $\dim(\text{im}(\alpha)) = \infty$ und $H^{k-1}(K) \neq 0$

ist, da $H^*(K)$ endlichdimensional ist.

Weil das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) & \hookrightarrow & C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q_0 & \xrightarrow{\alpha} & C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q \end{array}$$

mit den kanonischen Inklusionen und Projektionen kommutiert, ist

$$\text{im}(\alpha) = C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\dim(C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q) = \infty$ ist.

Der Funktionenraumquotient $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q$ wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

2.6.5 Satz

- (1) Q ist ∞ -dimensional.
- (2) Der Abschluss von Q ist $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$.
- (3) $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])/Q$ ist ∞ -dimensional.

Beweis: Zu (1): Eine Funktion $q \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ liegt in Q genau dann, wenn $q = g - g \circ s^2$ für ein $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$. Sei $q \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ gegeben mit $\text{supp}(q) \in]-\frac{1}{2}, s^2(-\frac{1}{2})]$. Setze $g := q$, dann gilt $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ und $g \circ s^2 = 0$, da $\text{im}(s^2) =]s^2(-\frac{1}{2}), 0]$. Und damit ist $q = g - g \circ s^2$.

Der Vektorraum $Q' := \{q \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0]) \mid \text{supp}(q) \in]-\frac{1}{2}, s^2(-\frac{1}{2})]\}$ ist also ein Unterraum von Q und offensichtlich unendlichdimensional, deshalb ist auch Q unendlichdimensional.

Zu (2): Es ist $\overline{Q} \subset \overline{C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])} = C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$.

Sei $f \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} f - f \circ s^{2n} &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ s^{2k}}_{=:g} - \sum_{k=0}^{n-1} f \circ s^{2k+2} \\ &= g - g \circ s^2 \end{aligned}$$

und daher gilt wegen $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$

$$f - f \circ s^{2n} \in Q.$$

Zusammen mit der Konvergenzaussage

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f \circ s^{2n} = 0$$

ergibt sich also $f \in \overline{Q}$.

Zu (3): Die Funktion s^2 besitzt ebenso wie s alle Eigenschaften aus Lemma 2.4.2 und damit gilt insbesondere, dass $s^2(0) = 0$, $(s^2)'(0) = 1$, $(s^2)^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 2$ und $s^2(t) > t$ für alle $t < 0$.

Stellt man s^2 als Summe $s^2(t) = t + \theta(t)$ für alle $t \in]-\frac{1}{2}, 0]$ dar, so ist $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ und $\theta(t) > 0$ für alle $t < 0$.

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ definiere

$$f_n(t) := \begin{cases} \frac{\theta(t)}{t^n} & t < 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Da θ in 0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung hat, ist für alle $n \geq 1$ $f_n \in C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$.

Die Behauptung ist nun, dass die gerade definierten Funktionen f_n linear unabhängig modulo Q sind. Andernfalls gäbe es eine Linearkombination

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_{n \geq 1} \lambda_n \cdot f_n(t) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{n \geq 1} \lambda_n \cdot \frac{1}{t^n} \right)}_{=: h(t)} \cdot \theta(t) \end{aligned}$$

für alle $t < 0$ und ein $g \in C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ mit

$$h(t) \cdot \theta(t) = g(t) - g(s^2(t)).$$

Nach dem Mittelwertsatz wäre dann

$$\begin{aligned} h(t) \cdot \theta(t) &= (t - s^2(t)) \cdot g'(\gamma(t)) \\ &= -\theta(t) \cdot g'(\gamma(t)) \end{aligned}$$

für alle $t < 0$ und jeweils ein $\gamma(t)$ mit $t \leq \gamma(t) \leq s^2(t) < 0$.

Es wäre also

$$h(t) = -g'(\gamma(t))$$

für alle $t < 0$.

Da aber $\frac{1}{t^n} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$ für alle $n \geq 1$ und damit auch

$$|h(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty,$$

hätte dies die Konsequenz, dass g' in jeder Umgebung von 0 unbeschränkt ist und g damit nicht wie gewählt in $C^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ liegen kann.

Das zeigt, dass man in $C_0^\infty(]-\frac{1}{2}, 0])$ beliebig viele bezüglich Q nichtäquivalente Funktionen finden kann, der Quotient ist also ∞ -dimensional. \square

Mit der letzten Aussage des obigen Satzes ist zugleich der Beweis des Hauptresultats über die Dimensionen der Kohomologie von knotengeblätterten Sphären abgeschlossen:

2.6.6 Satz Für alle $0 \leq k \leq 2n$ mit $H^{k-1}(K) \neq 0$ ist

$$\dim(H^k(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})) = \infty.$$

Die hinreichende Bedingung der Nichttrivialität der geshifteten Kohomologieräume von K ist mindestens im Grad 1 und im Grad $2n$ erfüllt und es folgt insbesondere:

2.6.7 Folgerung Unabhängig von allen getroffenen Wahlen ist immer $\dim(H^1(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})) = \infty$ und $\dim(H^{2n}(\mathbb{S}^{2n+1}, \mathcal{K})) = \infty$.

Man erhält also in gewissen Graden der Blätterungskohomologie von Knotenblätterungen der Sphären garantiert unendlichdimensionale Kohomologieräume, eine Tatsache, die in Zukunft – eventuell im Zusammenhang mit einer weiteren topologischen Klassifikation der Vektorräume – zu neuen Erkenntnissen über (geblätterte) Sphären beitragen kann.

Literaturverzeichnis

- [1] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [2] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 139. Springer-Verlag, 1993.
- [3] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 23. American Mathematical Society, 2000.
- [4] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations II*. Graduate Studies in Mathematics, Volume 60. American Mathematical Society, 2003.
- [5] Fernando Alcalde Cuesta, Gilbert Hector, and Paul A. Schweitzer. Homological vanishing cycles and existence of Reeb components for codimension one foliations. GF2003 extended abstract list: GF2003-52. Geometry and Foliations (Kyoto, 2003).
- [6] Alan H. Durfee. Foliations of odd-dimensional spheres. *Ann. of Math.*, 96:407–411, 1972.
- [7] Alan H. Durfee and H. Blaine Lawson, Jr. Fibered Knots and Foliations of Highly Connected Manifolds. *Invent. Math.*, 17:203–215, 1972.
- [8] Charles Ehresmann and Georges Reeb. Sur le champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrable dans une variété continuellement différentiable. *Comptes Rendus*, 218:955–957, 1944.
- [9] Claude Godbillon. *Feuilletages, Études géométriques*. Progress in Mathematics, Volume 98. Birkhäuser Verlag, 1991.
- [10] Gilbert Hector and Ulrich Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations, Part A*. Aspects of Mathematics 1. Friedr. Vieweg & Sohn, 1981.

- [11] Gilbert Hector and Ulrich Hirsch. *Introduction to the geometry of foliations, Part B*. Aspects of Mathematics E3. Friedr. Vieweg & Sohn, 1983.
- [12] H. Blaine Lawson, Jr. Codimension-one foliations of spheres. *Ann. of Math.*, 94:494–503, 1971.
- [13] Reinhold Meise and Dietmar Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Oxford Graduate Texts in Mathematics 2. Clarendon Press, 1997.
- [14] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematical Studies, No. 61. Princeton University Press, 1968.
- [15] Calvin C. Moore and Claude Schochet. *Global Analysis on Foliated Spaces*. Springer-Verlag, 1988.
- [16] Mark Alan Mostow. *Continuous cohomology of spaces with two topologies*. Memoirs of the American Mathematical Society, Number 175. American Mathematical Society, 1976.
- [17] S. P. Novikov. Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 14:268–304, 1965.
- [18] Georges Reeb. Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. *Actual. Sci. Ind.*, 1183, 1952.
- [19] Itiro Tamura. Every Odd Dimensional Homotopy Sphere has a Foliation of Codimension One. *Comment. Math. Helv.*, 47:164–170, 1972.
- [20] Itiro Tamura. Foliations and spinnable structures on manifolds. *Ann. Inst. Fourier*, 23:197–214, 1973.
- [21] Emery Thomas. Vector fields on manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75:643–683, 1969.
- [22] W. P. Thurston. Existence of codimension-one foliations. *Ann. of Math.*, 104:249–268, 1976.
- [23] H. E. Winkelnkemper. Manifolds as open books. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:45–51, 1973.