§ 3. Allgemeine Ergebnisse

① $\mathcal{G} \subset \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}^n}$; $\underline{f} : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$

Def 1. Eine Lösung des Systems 1. Ordnung

(S₁) $\quad \dot{x} = \underline{f}(t, x)$

mit Anfangswerten

(AWP) $\quad \varphi(t_0) = x_0$

ist $\underline{\varphi} : I \to \mathbb{R}^n$ mit:

1) $t_0 \in I$ $\quad$ 2) $\operatorname{Graph} \varphi \subset \mathcal{G}$

3) $\underline{\varphi}(t_0) = \varphi_0$ $\quad$ 4) $\underline{\dot{\varphi}}(t) = \underline{f}(t, \underline{\varphi}(t))$

Ausführlich: $\quad \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$

$\dots$

$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$

$\underline{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$; $\dot{\varphi}_j = f_j(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$

Nun sei $\mathcal{G}$ wie eben, $f : \underset{t, x_0, \dots, x_{n-1}}{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}$

Def 2 Eine Lsg der Dgl n-ter Ordnung

$$(D_n) \qquad x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

mit Anfangswerten

$$(AWP) \qquad \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= x_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit:

1) $t_0 \in I$ 2) φ n-mal diffbar
3) $\tilde{G}_\varphi = \{ (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t) \} \subset G$
4) $\varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$
5) $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$

② ~~Eine~~ Lösung von (S_1) impliziert Lösung von (D_n)

Betrachte das System (S_1), wenn (D_n) gegeben

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\cdots \\ &\cdots \\ \dot{x}_{n-2} &= x_{n-1} \\ \dot{x}_{n-1} &= f(t, x_0, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Ist $\underline{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ Lsg von S_1, so ist φ_0 eine Lösung von D_n.

<u>Beispiel</u> für die Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x$$

Zugehöriges System wäre

$$\dot{x}_0 = x_1$$
$$\dot{x}_1 = -2\beta x_1 - \omega_0^2 x_0$$

(1) <u>Def 3</u> $\underline{f} : G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$
Lipschitz-Abb $\Leftrightarrow$ $\exists$ Konstante L, so daß für alle $(t, \varphi), (t, \varphi^*) \in G$ gilt:

$$|\underline{f}(t,\varphi) - \underline{f}(t,\varphi^*)| \leq L\,|\varphi - \varphi^*|.$$

$\underline{f}$ lokal Lipschitz $\Leftrightarrow$ $\forall\, (t_0, \varphi_0) \in G$ existiert eine Umgebung, auf der $\underline{f}$ Lipschitz.

Bemerkung. $\underline{f}$ stetig diffbar $\Rightarrow$ lokale Lipschitzbedingung

Theorem 1 (Picard-Lindelöf)

$\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$ stetig u. lokal Lipschitz. Dann existiert zu jedem $(\tau, \underline{\xi}) \in G$ genau eine Kurve $C_{\tau,\xi}$:

$$C_{\tau,\xi} = (t, \underline{\varphi}(t, \tau, \xi))$$

mit: $\underline{\varphi}$ löst AWP $(\tau, \underline{\xi})$ (i.e. $\underline{\varphi}(\tau, \tau, \underline{\xi}) = \underline{\xi}$). $C_{\tau,\xi}$ läuft in G von Rand zu Rand.

Theorem 2 Zu $(\tau, \xi) \in G$ gibt es ein maximales offenes Intervall $I(\tau, \underline{\xi}) \subset \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in I(\tau, \underline{\xi})$ die Fkt

// aus Thm 1 $\underline{\varphi}(t, \tau, \xi)$ definiert ist. // Die Menge

$$B = \{ (t, \tau, \underline{\xi}) : t \in I(\tau, \xi) \} \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

ist offen, die Abbildung

$$\underline{\varphi} : (t, \tau, \underline{\xi}) \longmapsto \underline{\varphi}(t, \tau, \underline{\xi})$$

ist stetig und nach t stetig partiell diffbar. Ist $\underline{f}$ sogar nach ξ stetig partiell diffbar, so ist $\underline{\varphi}$ stetig diffbar