

Bonner Mathematische Schriften

Nr. 391

Jörn Müller

**Zur Kohomologie und Spektraltheorie des
Hodge-Laplaceoperators von
Mannigfaltigkeiten mit gefaserter
Spitzenmetrik**

Bonn 2009

BONNER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

Nr. 391

Gegenwärtige Herausgeber:

S. Albeverio, H. W. Alt, W. Ballmann, C. - F. Bödigheimer, A. Bovier, S. Conti,
A. Eberle, J. Franke, J. Frehse, M. Griebel, U. Hamenstädt, D. Huybrechts,
H. Koch, P. Koepke, M. Lesch, W. Müller, F. Otto, M. Rapoport, M. Rumpf,
M. Schäl, K. Scherer, J. Schröer, S. Schwede, C. Stroppel, K.-T. Sturm,
O. Venjakob

Begründet von E. Peschl

Fortgeführt von E. Brieskorn, H. Föllmer, G. Harder, G. Hasenjäger,
S. Hildebrandt, F. Hirzebruch, H. Karcher, A. Kunoth, W. Klingenberg,
W. Krull, R. Leis, I. Lieb, F. Pop, E. Sperner, J. Tits, H. Unger, W. Vogel,
H. Werner

Druck: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn
Mathematisches Institut der Universität
Wegelerstr. 10, D-53115 Bonn
email: bibliothek@math.uni-bonn.de
ISSN 0524-045X

Zur Kohomologie
und
Spektraltheorie des Hodge-Laplaceoperators
von
Mannigfaltigkeiten mit gefaserner Spitzenmetrik

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Jörn Müller
aus
Neunkirchen-Seelscheid

Bonn, November 2008

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. W. Müller
 2. Gutachter: Prof. Dr. W. Ballmann
- Tag der Promotion: 26.3.2009

Zusammenfassung

Eine Mannigfaltigkeit X mit gefaserter Spitzenmetrik kann als Verallgemeinerung der geometrischen Struktur von lokal-symmetrischen Räumen vom \mathbb{Q} -Rang Eins angesehen werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Spektraltheorie des Hodge-Laplaceoperators Δ auf dieser Klasse von Mannigfaltigkeiten studiert, mit dem Ziel, ein Theorem vom Hodge-Typ zu beweisen. Die Vorgehensweise orientiert sich dabei an Arbeiten von W. Müller, insbesondere [Mu2]. Die spektrale Auflösung des absolutstetigen Raums von Δ wird durch verallgemeinerte Eigenformen gegeben; diesen entsprechen Eisensteinreihen im lokal-symmetrischen Fall. Unter weiteren Bedingungen an die Faserung der „Spitze“ von X können sie auf direkte Weise konstruiert werden. Ideen von G. Harder folgend, zeigen wir, dass spezielle singuläre Werte dieser Eigenformen Klassen in der de Rham-Kohomologie $H^p(X)$ definieren. Dies ermöglicht, in Verallgemeinerung des klassischen Hodge-Theorems auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten, Klassen in $H^p(X)$ durch harmonische Formen zu repräsentieren.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	6
1 Mannigfaltigkeiten mit gefaserter Spitzenmetrik	11
1.1 Riemannsche Submersionen	11
1.2 Mannigfaltigkeiten mit gefaserter Spitzenmetrik	12
1.2.1 Beispiele	13
2 Funktionen	14
2.1 Laplaceoperator	14
2.1.1 Beispiel: warped product	15
2.1.2 Beispiel: Total geodätische Fasern	15
2.2 Spitzenfunktionen	17
2.3 Projizierbare mittlere Krümmung	21
2.4 Spektraltheorie	23
2.4.1 Spektrale Auflösung von $\Delta_{1,Z}$	23
2.4.2 Wesentliches Spektrum von Δ_Z	25
2.4.3 Spektrum von Δ_X	28
2.5 Verallgemeinerte Eigenfunktionen	29
2.5.1 Parametrix der Resolvente	29
2.5.2 Analytische Fortsetzung der Resolvente	31
2.5.3 Verallgemeinerte Eigenfunktionen	32
3 Differentialformen	35
3.1 Glattes Faserbündel	35
3.2 Faserharmonische Formen	37
3.3 Kohomologie	39
3.4 Flacher Zusammenhang des Kohomologiebündels der Fasern	40
3.5 Laplaceoperator auf $\Omega^*(Z)$	41
3.6 Punktspektrum	44
3.7 Zwei Bedingungen	45
3.8 Spektrale Sequenz	47
3.9 Parametrix	50
3.10 Verallgemeinerte Eigenformen	51
3.11 Asymptotik des konstanten Terms	53
3.12 Maass–Selberg Relationen	56

3.13	Umparametrisierung	60
3.14	Pole von $E(s)$	62
3.15	Residuen	64
4	Theorem vom Hodge–Typ	67
4.1	Der Fall $k \neq f/2$	67
4.2	Der Fall $k = f/2$	68
4.3	Ein Theorem vom Hodge–Typ	70
4.3.1	Zur Signatur	74
	Symbolverzeichnis	78
	Literatur	79

Einleitung

Für eine Riemannsche Submersion $M \rightarrow B$ sei $Z = \mathbb{R}^+ \times M$ mit der Riemannschen Metrik $g^Z = du^2 + \pi^*g^B + e^{-2u}g^{F_b}$, wobei g^B und g^{F_b} die Riemannschen Metriken auf B bzw. dem vertikalen Tangentialbündel seien. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit X heisst Mannigfaltigkeit mit gefaseter Spitzenmetrik, wenn X außerhalb einer kompakten Menge isometrisch zu (Z, g^Z) ist. Sofern die Fasern nicht trivial (Punkte) sind, ist X eine vollständige Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen. Mannigfaltigkeiten mit gefaseter Spitzenmetrik verallgemeinern die geometrische Struktur von lokal-symmetrischen Räumen vom \mathbb{Q} -Rang Eins „im Unendlichen“.

In dieser Arbeit soll die Spektraltheorie des Laplaceoperators auf Differentialformen $\Omega^p(X)$ untersucht werden. Das vorrangige Ziel ist dabei, ein Theorem vom Hodge-Typ zu beweisen, d.h., harmonische Repräsentanten der de Rham-Kohomologieklassen zu finden.

Die Vorgehensweise orientiert sich an Arbeiten von Werner Müller, insbesondere [Mu2]. Die Idee und wichtige Argumente des Beweises des Hodge-Theorems finden sich bei Günter Harder ([Har], [Har2]), wo lokal symmetrische Räume behandelt werden. Die Repräsentanten der Klassen sind dabei L^2 -harmonische Formen, oder werden durch spezielle Werte von Eisensteinreihen definiert.

Harders Arbeiten bilden unter anderen die Grundlage für W. Müllers Überlegungen [Mu4] zu einem Theorem vom Hodge-Typ auf Mannigfaltigkeiten mit Spitzen. Die vorliegende Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieser Resultate. Die Rolle der Eisensteinreihen wird dabei von verallgemeinerten Eigenformen übernommen; sie liefern die Spektralzerlegung des absolutstetigen Unterraums von $\text{dom } \Delta_X$.

Ein anderer Zugang zur Untersuchung der Spektraltheorie von Mannigfaltigkeiten mit gefaseter Spitzenmetrik wurde in der Dissertation [Vai] von Boris Vaillant gewählt. Dabei wird X als kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand betrachtet, und das ϕ -Calculus von Melrose [Me] und Mazzeo verwendet. Ein wesentliches Ergebnis von B. Vaillant ist die meromorphe Fortsetzung der Resolvente des verallgemeinerten Dirac-Operators. Dies ist äquivalent zur meromorphen Fortsetzung der verallgemeinerten Eigenschnitte des Diracoperators.

Mit Hilfe der Methoden von Melrose wurden auch einige Resultate zur L^2 -Hodge-Theorie hergeleitet, exemplarisch sei dazu die Arbeit [HHM] genannt. Dort werden die L^2 -harmonischen Formen mit dem Bild der gewichteten Kohomologie mit Gewicht $\varepsilon > 0$ in derjenigen mit Gewicht $-\varepsilon$ identifiziert und dieses wiederum mit der Schnittkohomologie verglichen.

In der vorliegenden Arbeit hingegen wird die de Rham-Kohomologie betrachtet. Es stellt sich heraus, dass wie im lokal-symmetrischen Fall alle Klassen harmonische Repräsentanten haben. Diejenigen Klassen, die nicht durch Formen mit kompaktem Träger repräsentiert werden können, haben singuläre Werte als Repräsentanten.

Es wurde eine möglichst direkte, explizite Herleitung der meromorphen Fortsetzung der verallgemeinerten Eigenformen angestrebt. Dazu wird nicht wie in der Arbeit von Vaillant vorgegangen, weshalb allerdings einige geometrische Bedingungen an die Faserung $M \rightarrow B$ gestellt werden müssen.

Es folgt eine Übersicht über die Arbeit.

Kapitel 1: Hier werden Mannigfaltigkeiten mit gefaserner Spitzenmetrik definiert, und einige Beispiele beschrieben, die die Relevanz dieser Klasse von Mannigfaltigkeiten verdeutlichen.

Kapitel 2 behandelt die Spektraltheorie des Laplace-Beltrami-Operators auf Mannigfaltigkeiten mit gefaserner Spitzenmetrik. Dieses Kapitel wird für das Hodge-Theorem in Kapitel 4 nicht benötigt, aber hier werden die verwendeten Methoden aus der Spektraltheorie und zur Konstruktion einer Parametrix der Resolvente erläutert. Im darauffolgenden Kapitel über Differentialformen wird dann nur noch auf die wesentlichen Unterschiede eingegangen.

Zuerst wird in **Satz 2.1** die lokale Form des Laplaceoperators auf dem nicht-kompakten Ende Z bestimmt. Ein Term ist ein „horizontaler“ Operator Δ_h . Falls die Faserung $M \rightarrow B$ ein gewarptes Produkt ist, ist Δ_h gerade der Laplaceoperator auf der Basis B (*Abschnitt 2.1.1*), und falls die Fasern total geodätisch sind, gibt W. Ballmanns Arbeit [Bal] eine Darstellung von Δ_h (*Abschnitt 2.1.2*).

In *Abschnitt 2.2* werden Spitzenfunktionen und ihr orthogonales Komplement, die faserweise konstanten Funktionen, behandelt. **Satz 2.8** gibt die lokale Form des Laplaceoperators Δ_Z hinsichtlich der orthogonalen direkten Summe

$$L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z), \quad (1)$$

wobei $L_0^2(Z)$ die Spitzenfunktionen sind.

Für die Bestimmung der spektralen Auflösung von Δ_Z ist es wesentlich, dass die Zerlegung (1) invariant unter Δ_Z ist. Eine geometrische Bedingung dafür liefert **Satz 2.9**, nämlich die Projizierbarkeit der mittleren Krümmung H der Fasern F von $M \rightarrow B$. Unter dieser Bedingung gibt **Satz 2.10** eine explizite Darstellung von $\Delta_Z \upharpoonright L_1^2(Z)$ als Operator auf $L^2(\mathbb{R}^+ \times B)$:

Satz 2.10.

Bei projizierbarer mittlerer Krümmung $H = \pi^ \bar{H}$ der Fasern ist die Einschränkung von Δ_Z auf $C_0^\infty(Z) \cap L_1^2(Z)$ isometrisch zu*

$$-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \dim F \frac{\partial}{\partial u} + \Delta_B - \frac{1}{2} \operatorname{div}_B \bar{H} + \frac{1}{4} \|\bar{H}\|^2.$$

Dieser Operator hat rein absolutstetiges Spektrum und **Satz 2.12** liefert seine spektrale Auflösung. Die Einschränkung $\Delta_Z \upharpoonright L_0^2(Z)$ hat reines Punktspektrum (**Satz 2.14**).

Wenn Δ_Z die Zerlegung (1) nicht invariant lässt, so zeigt **Satz 2.16**, dass die wesentlichen Spektren von Δ_Z und dem „Diagonalterm“ von Δ_Z bezüglich (1) gleich sind. Der Beweis dieses letzten Satzes ist so allgemein, dass er ohne Änderung auch für den Laplaceoperator auf Differentialformen gilt, wenn Spitzenfunktionen durch faserweise harmonische Formen ersetzt werden.

Analog zu [Mu2] wird mit Hilfe der Resolvente von Δ_Z eine Parametrix der Resolvente $(\Delta_X - \lambda)^{-1}$ konstruiert. Wesentlich dabei ist, dass die Einschränkung der Resolvente von Δ_Z auf $L_1^2(Z)$ explizit angegeben werden kann (*Abschnitt 2.5.1*). Mit

Methoden der Streutheorie kann gezeigt werden, dass die absolutstetigen Anteile von $\text{dom } \Delta_X$ und $\text{dom } \Delta_Z$ unitär äquivalent sind (*Abschnitt 2.4.3*).

Der absolutstetige Unterraum von $\text{dom } \Delta_X$ wird durch verallgemeinerte Eigenfunktionen parametrisiert, die mit Hilfe der Resolvente von Δ_X definiert werden (*Abschnitt 2.5*). Die verallgemeinerten Eigenfunktionen wiederum werden durch Eigenformen des horizontalen Laplaceoperators Δ_h parametrisiert und sind meromorphe Funktionen auf der spektralen Fläche Σ_s (*Abschnitt 2.5.2*).

Kapitel 3: Die bisherigen Ergebnisse werden auf den Fall von Differentialformen erweitert und die nötigen Hilfsmittel für die Formulierung und den Beweis eines Theorems vom Hodge-Typ bereitgestellt.

Zuerst werden einige Fakten über das Differential d^M eines glatten Faserbündels $M \rightarrow B$ wiederholt (*Abschnitt 3.1*). Es gibt eine Zerlegung

$$d^M = d^F + d^{1,0} + d^{2,-1}$$

in das Differential d^F entlang der Fasern, die Krümmung $d^{2,-1}$ von $M \rightarrow B$ und einen horizontalen Differentialoperator 1. Ordnung.

In *Abschnitt 3.2* werden faserharmonische Formen $\Omega(B, \mathcal{H}(F))$ definiert. Diese sind die Verallgemeinerung der faserweise konstanten Funktionen im Funktionenfall. Anders als dort sind faserharmonische Formen im Allgemeinen aber nicht mehr Lift von harmonischen Formen auf der Basis.

Abschnitte 3.3, 3.4 und *3.5* führen Bezeichnungen und Notationen ein, die für alle verbleibenden Kapitel gültig sind. In **Satz 3.9** wird die lokale Form des Hodge-Laplaceoperators auf Z beschrieben. Analog zum Funktionenfall zeigt **Satz 3.10**, dass die Einschränkung des Laplaceoperators auf das orthogonale Komplement der faserweise harmonischen Formen reines Punktspektrum hat.

Damit die faserharmonischen Formen einen invarianten Unterraum für Δ_Z bilden, werden in *Abschnitt 3.7* zwei Forderungen an die Faserung $M \rightarrow B$ gestellt, nämlich, (A) dass dies ein flaches Bündel ist, und (B) dass der horizontale Anteil $d^{1,0}$ von d^M die faserharmonischen Formen invariant lässt. Ein hinreichendes Kriterium für die zweite Bedingung liefert

Satz 3.6.

Ist die mittlere Krümmung H der Fasern projizierbar, so lassen $d^{1,0}$ und $\delta^{1,0}$ die Zerlegung

$$\Omega^*(M) = \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)) \oplus \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp)$$

in faserweise harmonische Formen und ihr orthogonales Komplement invariant.

Die Zerlegung von $\Omega^*(M)$ aus Satz 3.6 induziert eine entsprechende Zerlegung von $\Omega^*(Z)$, und diese ist invariant unter Δ_Z . Außerdem ist der horizontale Operator $\Delta_{1,0}$ positiv semidefinit. Alle weiteren Resultate der Arbeit werden deshalb unter den Annahmen (A) und (B) hergeleitet.

Eine weitere wichtige Konsequenz dieser beiden Bedingungen ist, dass die Spektrale Sequenz von $M \rightarrow B$ bereits an ihrem zweiten Term degeneriert (*Abschnitt 3.8*).

Dies erlaubt, harmonische Formen auf M mit $\Delta_{1,0}$ -harmonischen Formen auf B mit Werten in faserharmonischen Formen zu identifizieren:

Satz 3.14.

Die mittlere Krümmung H der Fasern sei projizierbar und $\pi : M \rightarrow B$ flach. Dann ist

$$H^r(B, \mathcal{H}^s(F)) = \mathcal{H}^r(B, \mathcal{H}^s(F)) := \{\omega \in \Omega^r(B, \mathcal{H}^s(F)) \mid \Delta_{1,0}\omega = 0\}$$

und

$$H^p(M) = \bigoplus_{r+s=p} \mathcal{H}^r(B, \mathcal{H}^s(F)).$$

Die Konstruktion einer Parametrix für Δ_X in *Abschnitt 3.9* ist dann weitestgehend analog zum Funktionenfall.

In *Abschnitt 3.10* werden die verallgemeinerten Eigenformen $E_\mu(\Lambda, \phi)$, $\Lambda \in \Sigma_s$ zu Δ_X konstruiert. Dies geschieht analog zum Funktionenfall, wobei ϕ jetzt eine faserharmonische Form ist, die zugleich Eigenform von $\Delta_{1,0}$ zum Eigenwert μ ist. $E_\mu(\Lambda, \phi)$ ist eine glatte, in $\Lambda \in \Sigma_s$ meromorphe Differentialform in $\Omega^*(X)$, erfüllt

$$\Delta E_\mu(\Lambda, \phi) = \pi_s(\Lambda)E_\mu(\Lambda, \phi) \quad \text{mit der Projektion} \quad \pi_s : \Sigma_s \rightarrow \mathbb{C}$$

und hat für Λ in der Resolventenmenge von Δ_X eine vorgegebene Asymptotik (Seite 53). Von besonderem Interesse sind die Eigenformen zu $\mu = 0$, denn dann ist ϕ Repräsentant einer nicht-trivialen Klasse in $H^*(M)$.

In *Abschnitt 3.11* wird die Asymptotik des faserharmonischen Anteils von $E = E_{\mu=0}$ auf Z bestimmt (**Satz 3.19**). Die Kenntnis dieser asymptotischen Entwicklung erlaubt es, Funktionalgleichungen zwischen E , dE und $*E$ herzuleiten. Diese sind wesentlich für die Beweise in Kapitel 4.

Mit *Abschnitt 3.12* beginnen die Vorarbeiten zum Hodge-Theorem, d.h., es sollen Repräsentanten der Kohomologieklassen von $H^*(X)$ in harmonischen Werten bzw. Residuen der verallgemeinerten Eigenformen – in sogenannten „singulären Werten“ – gefunden werden. Besonderes Augenmerk gilt deshalb den verallgemeinerten Eigenformen zu $\Lambda \in \Sigma_s$ im Urbild einer Umgebung von 0. Dort kann Σ_s als zweifache Überlagerung von \mathbb{C} geschrieben werden und die verallgemeinerten Eigenformen erfüllen

$$\Delta E(s, \phi) = s(2d_k - s)E(s, \phi), \quad \phi \in \mathcal{H}^*(B, \mathcal{H}^k(F)), \quad d_k = \lfloor \frac{f}{2} - k \rfloor.$$

Die Maass-Selberg-Relationen (**Satz 3.21**) sind der Schlüssel für alle weiteren Überlegungen. Sie ermöglichen präzise Aussagen über Lage und Vielfachheit der Pole der verallgemeinerten Eigenformen $E(s, \phi)$ (**Sätze 3.22** und **3.23**).

Von besonderem Interesse ist die Stelle $s = 2d_k$: Liegt dort ein Pol von $E(\cdot, \phi)$, so ist dieser einfach, und das Residuum $\tilde{E}(\phi)$ ist eine L^2 -harmonische Form, also insbesondere geschlossen (**Satz 3.25**). Wenn die verallgemeinerte Eigenform bei $2d_k$ holomorph ist, so ist sie eine glatte Δ_X -harmonische Form. Dann muss noch untersucht werden, ob E ein Repräsentant in $H^p(X)$ ist.

Kapitel 4: Die Resultate aus Kapitel 3 ermöglichen es, Repräsentanten der Kohomologieklassen in singulären Werten zu finden. Dabei muss nach dem Grad von ϕ in Faserrichtung unterschieden werden (*Abschnitte 4.1* und *4.2*). Es zeigt sich, dass für Fasergrad $k < \frac{f}{2}$ die Residuen $\tilde{E}(\phi)$ bei $2d_k$ und für $k \geq \frac{f}{2}$ die Funktionswerte $E(2d_k, \phi)$ mögliche Repräsentanten in $H^*(X)$ sind (**Sätze 4.1, 4.2, 4.4** und **4.5**).

In *Abschnitt 4.3* schließlich wird das **Theorem 4.8** vom Hodge-Typ formuliert und bewiesen. Dazu werden Kohomologieklassen in $H^p(M)$ mit Hilfe einer Abbildung $\Xi : H^p(M) \rightarrow H^p(X)$ zu Klassen in $H^p(X)$ erweitert, wobei letztere durch singuläre Werte repräsentiert werden. Sei $r : H^p(X) \rightarrow H^p(M)$ die von $i : M \hookrightarrow X$ induzierte Abbildung.

Theorem 4.8.

Sei $H_1^p(X) = \ker r = \text{im}(H_c^p(X) \rightarrow H^p(X))$ das Bild der Kohomologie mit kompaktem Träger in der de Rham-Kohomologie. Sei $H_{\text{inf}}^p(X)$ ein zu $H_1^p(X)$ in $H^p(X)$ komplementärer Raum. Dann ist $H_{\text{inf}}^p(X)$ isomorph zu $\text{im } r$.

Eingeschränkt auf $\text{im } r$ ist $r \circ \Xi$ ein Isomorphismus

$$r \circ \Xi : r(H^p(X)) \rightarrow r(H^p(X)).$$

Insbesondere besitzen alle Klassen in $H^p(X)$ harmonische Repräsentanten (**Korollar 4.9**). Als eine Anwendung von Theorem 4.8 wird ein Satz über die L^2 -Signatur von X angegeben.

Die Notation wurde auch über Kapitelgrenzen hinweg möglichst einheitlich gestaltet, deshalb werden Symbole in der Regel auch nur einmal definiert. Um die Arbeit trotzdem lesbar zu halten, findet sich vor dem Literaturverzeichnis noch ein Symbolindex.

*

Mein besonderer Dank gilt Werner Müller für das Dissertationsthema und die jahrelange Begleitung meiner Studien. Meine Arbeit basiert wesentlich auf seinen Ergebnissen und von ihm habe ich einen erheblichen Teil meiner mathematischen Ausbildung erhalten. In der zweiten Hälfte des Dissertationsprojekts war Eugenie Hunsicker unter anderem aufgrund ihrer Einsicht in die Methoden von Melrose eine große Hilfe. Auch Gilles Carron, Alexander Strohmaier und Gregor Weingart danke ich für erhellende Gespräche.

Außerdem danke ich meinen Kolleginnen und Kollegen am Mathematischen Institut in Bonn, insbesondere Thomas Buch, Maria Castillo, Rui Wang und Artur Wotzke. Sie haben das richtige Arbeitsumfeld geschaffen und waren auf die eine oder andere Weise hilfreich beim Zustandekommen dieser Arbeit.

Schließlich möchte ich meinen Eltern danken, die mich während der gesamten Studienzeit in vielerlei Hinsicht unterstützt haben, und auf die ich mich stets verlassen konnte.

1 Mannigfaltigkeiten mit gefaserner Spitzenmetrik

1.1 Riemannsche Submersionen

Wir erinnern zuerst an einige wichtige Eigenschaften von Riemannschen Submersionen. Weitere Details können z.B. [Bes] oder [Fal] entnommen werden.

Seien (M, g) und (B, g^B) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \rightarrow B$ eine glatte Submersion. Für jedes $x \in M$ mit $b = \pi(x)$ sei $F_b = \pi^{-1}(b)$, $\mathcal{V}_x \subset T_x M$ der Tangentialraum an F_b (vertikaler Unterraum bei x). Der horizontale Unterraum \mathcal{H}_x bei x ist definiert durch $\mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = T_x M$. Die Tangentialabbildung $d\pi : T_x M \rightarrow T_b B$ hat den Kern \mathcal{V}_x und induziert somit einen Isomorphismus von \mathcal{H}_x nach $T_b B$.

Definition 1.1. Die Daten $((M, g), (B, g^B), \pi)$ (oder kurz π), sind eine *Riemannsche Submersion*, wenn $d\pi$ für alle $x \in M$ mit $\pi(x) = b$ eine Isometrie

$$d\pi : (\mathcal{H}_x, g_x \upharpoonright \mathcal{H}_x) \rightarrow (T_b B, g_b^B)$$

induziert.

Die geometrischen Eigenschaften einer Riemannschen Submersion werden im Wesentlichen durch zwei Tensorfelder, T und A , beschrieben. Im Folgenden bezeichne \mathcal{H} und \mathcal{V} auch die Projektion auf \mathcal{H} und \mathcal{V} .

Sei D der Levi-Civita-Zusammenhang von g und \hat{D} die Familie aller Levi-Civita-Zusammenhänge der Metriken \hat{g}_b auf den Fasern F_b , für alle $b \in B$. Das heißt, sind U und V vertikale Vektorfelder auf F_b , so ist $\hat{D}_U V := \mathcal{V}D_U V$ der Levi-Civita-Zusammenhang auf F_b .

Definition 1.2. Sei T das $(2, 1)$ -Tensorfeld auf M , dessen Wert auf Vektorfeldern E_1, E_2 gegeben ist durch

$$T_{E_1} E_2 = \mathcal{H}D_{\mathcal{V}E_1} \mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}D_{\mathcal{V}E_1} \mathcal{H}E_2.$$

Seien U, V, W vertikale und X, Y, Z horizontale Vektorfelder. Dann ist $T_U V = \mathcal{H}D_U V$ die zweite Fundamentalform auf jeder Faser, also symmetrisch:

$$T_U V = T_V U$$

Weitere Eigenschaften folgen direkt aus der Definition von T :

$$\begin{aligned} T_X U &= T_X Y = 0 \\ T_U V &= \mathcal{H}D_U V \quad \text{und} \quad T_U X = \mathcal{V}D_U X \\ (T_U V, X) &= -(T_U X, V) \end{aligned} \tag{2}$$

Aus (2) folgt, dass die zweite Fundamentalform $\mathcal{H}\nabla_U^M V$ der Fasern genau dann identisch verschwindet, wenn $T = 0$. In diesem Fall sind die Fasern von $M \rightarrow B$ *total geodätisch*, d.h. Geodätische in den Fasern sind auch Geodätische in M , siehe z.B. [Jo]. In einer Riemannschen Submersion mit total geodätischen Fasern sind alle Fasern isometrisch, und die Isometrie ist durch Parallelverschiebung entlang des

horizontalen Lifts von Kurven in B gegeben. Wir werden in Abschnitt 2.1.2 darauf zurückkommen.

Entsprechend wird das $(2, 1)$ -Tensorfeld A definiert als

$$A_{E_1}E_2 = \mathcal{H}D_{\mathcal{H}E_1}\mathcal{V}E_2 + \mathcal{V}D_{\mathcal{H}E_1}\mathcal{H}E_2.$$

Sind X, Y horizontal, so folgt

$$A_XY = \frac{1}{2}\mathcal{V}[X, Y] \quad \text{siehe [Bes, Prop. 9.24].}$$

Das Frobenius-Theorem ([La], S. 156) liefert damit das Kriterium für Integrität der horizontalen Distribution:

Lemma 1.3. *Die horizontale Distribution \mathcal{H} ist genau dann integabel, wenn $A = 0$.*

Ist \mathcal{H} integabel, so ist M lokal isometrisch zu $(B \times F, g^B + g^{F_b})$ für eine Schar $\{g^{F_b}\}$ von Metriken auf den Fasern. Der Beweis erfolgt durch Integration von \mathcal{H} .

1.2 Mannigfaltigkeiten mit gefaseter Spitzenmetrik

Nach den einleitenden Bemerkungen zu Riemannschen Submersionen können jetzt Mannigfaltigkeiten mit gefaseter Spitzenmetrik definiert werden.

Seien (M, g^M) und (B, g^B) geschlossene, zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \rightarrow B$ eine Riemannsche Submersion. Durch g^M wird eine Metrik g^{F_b} auf den Fasern $F_b = \pi^{-1}(\{b\})$ induziert. Diese sind wieder geschlossen, und es gilt $T_xF_b = \ker d\pi_x = \mathcal{V}_x$. Außerdem seien die Fasern zusammenhängend.

Auf M sei eine mit $u \in \mathbb{R}^+$ indizierte Schar von Metriken definiert durch

$$g_u^M = \pi^*g^B \oplus e^{-2u}g^{F_b},$$

d.h. für $x \in M, b = \pi(x), v = v_v + v_h \in T_xM = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x$

$$g_u^M(x)(v, w) = g_b^B(d\pi_x v_h, d\pi_x w_h) + e^{-2u}g_x^{F_b}(v_v, w_v)$$

Dann ist $g_0^M = g^M$. Weil (M, g^M) vollständig ist, ist $\pi : M \rightarrow B$ eine lokal triviale Faserung ([Bes, Theorem 9.42]); insbesondere ist $f := \dim F$ konstant. Weiter sind alle Fasern F_b diffeomorph, der Diffeomorphismus ist durch horizontalen Lift von Kurven in B gegeben.

Sei $Z = \mathbb{R}^+ \times M$ mit der Metrik $g^Z := du^2 + g_u^M$.

Die von dieser Metrik induzierte Norm auf $L^2(Z)$ ist gegeben durch

$$\|\phi\|_{L^2(Z)}^2 = \int_0^\infty \int_B \int_{F_b} |\phi|^2(u, (b, y)) dy \omega_B e^{-fu} du,$$

wobei ω_B die Volumenform auf B bezüglich g^B ist.

Eine Mannigfaltigkeit X heisst *Mannigfaltigkeit mit gefaseter Spitzenmetrik*, falls X außerhalb einer kompakten Menge X_0 isometrisch zu Z ist.

1.2.1 Beispiele

a) Ist die Basis B ein Punkt, so lautet die Metrik auf Z

$$du^2 + e^{-2u}g,$$

d.h. die Faser ist $F = M$ und Z ist eine Spitze mit Basis M .

Ist hingegen jede Faser F_b ein Punkt (also z.B. $B = M$ mit $\pi = \text{id}$), so lautet die Metrik auf Z

$$du^2 + \pi^*g^B,$$

d.h. Z ist ein Zylinder mit Basis M .

b) In [Mu2],[Mu1] behandelt W. Müller lokal symmetrische Räume vom \mathbb{Q} -Rang 1. Hier betrachten wir nur den Fall einer Spitze: Sei $X = X_0 \cup_M Z$, wobei X_0 eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand M , und $Z = \mathbb{R}^+ \times M$ isometrisch zu einer Spitze eines lokal-symmetrischen Raum mit \mathbb{Q} -Rang 1 sei. Dann gibt es ein Faserbündel $F \rightarrow M \rightarrow B$ wobei $F := \Gamma \cap N \setminus N$ eine kompakte Nilmannigfaltigkeit, und B ein lokal symmetrischer Raum sind. Die Metrik auf $\mathbb{R}^+ \times M$ hat dann lokal die Form

$$g^Z = du^2 + \pi^*g^B + e^{-2au}g_1(b) + e^{-4au}g_2(b), \quad (3)$$

wobei $a > 0$ und g^B die Metrik auf B ist. $g_1(b), g_2(b)$ haben Träger entlang der Faser F_b über $b \in B$. Die Volumenform auf Z ist dann gegeben durch

$$\text{vol}_Z = e^{-qu} du \text{ vol}_B \text{ vol}_{F_b},$$

für ein $q > 0$.

Wählen wir jetzt etwa als symmetrischen Raum den hyperbolischen Raum

$$SO_e(n, 1)/SO(n)$$

der Dimension n über \mathbb{R} , so hat die Metrik (3) die Form

$$g^Z = du^2 + \pi^*g^B + e^{-2au}g_1(b),$$

siehe Proposition 2.9 in [Web] und z.B. [Ca-Pe]. Eine ähnliche Situation liegt in der Arbeit [Har2] vor, dort ist $X = \Gamma \setminus (\mathbb{H} \times \dots \times \mathbb{H} \times Y \times \dots \times Y)$ mit der oberen komplexen Halbebene \mathbb{H} und dem 3-dimensionalen hyperbolischen Raum Y , sowie einer torsionsfreien Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subset SL(2, \mathfrak{D})$.

2 Funktionen

In diesem Kapitel wird die Spektraltheorie des Laplaceoperators auf Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit mit gefaseter Spitzenmetrik behandelt.

2.1 Laplaceoperator

Es wird die lokale Form des Laplaceoperators auf Funktionen auf Z bestimmt. Die Bezeichnungen sind dabei wie in Kapitel 1.2.

Sei ∇ Levi-Civita-Zusammenhang auf Z bezüglich g^Z .

Sei $\{X_i, U_k\}$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von $(M, g^M = \pi^*g^B + g^{F_b})$, wobei die X_i basic Vektorfelder mit $\pi_*X_i = \bar{X}_i$ für einen orthonormalen Rahmen \bar{X}_i von B , und die U_k vertikale Vektorfelder seien ($\pi_*U_k = 0$). Dann ist $\{\partial_u, \tilde{U}_j := e^u U_k, X_i\}$ ein orthonormaler Rahmen von (Z, g^Z) .

Im Folgenden ist U vertikal, $g^{F_m}(U, U) = 1$, X horizontal, $g^M(X, X) = 1$, $g := g^Z$, $\partial := \partial_u$. Insbesondere z.B. $g(U, X) = 0, V(g(U, U)) = 0$.

Außerdem ist $[U, X]$ vertikal, denn $\pi_*[U, X] = [\pi_*U, \pi_*X] = 0$, denn V ist vertikal $\Leftarrow: \pi_*V = 0$. Weil der Fluss ϕ_t von ∂ Vektorfelder auf M invariant lässt ($\phi_t^*X = X, \phi_t^*U = U$), verschwinden auch die entsprechenden Lieklammern:

$$[\partial, X] = \text{Lie}_\partial X = 0, \quad [\partial, U] = \text{Lie}_\partial U = 0.$$

Aus der Koszulformel für metrische Zusammenhänge folgt

$$\begin{aligned} g(\nabla_U X, \partial) &= 0 \\ g(\nabla_\partial \partial, X) &= g([X, \partial], \partial) = 0 \\ g(\nabla_\partial \partial, \tilde{U}) &= g([\tilde{U}, \partial], \partial) = e^u g^M([U, \partial], \partial) = 0 \\ &\quad (\text{weil } [\tilde{U}, \partial] = e^u([U, \partial] - U)) \\ g(\nabla_X X, \partial) &= g([\partial, X], X) = 0 \\ g(\nabla_{X_i} X_i, X_k) &= g^M(\nabla_{X_i}^M X_i, X_k) = g^B(\nabla_{\bar{X}_i}^B \bar{X}_i, \bar{X}_k) \\ g(\nabla_X X, \tilde{U}) &= g([\tilde{U}, X], X) = e^u g([U, X], X) = 0 \\ g(\nabla_{\tilde{U}} \tilde{U}, \partial) &= g([\partial, \tilde{U}], \tilde{U}) = 1 + e^{2u} g^M([\partial, U], U) = 1 \\ g(\nabla_{\tilde{U}} \tilde{U}, X) &= -g(\tilde{U}, [\tilde{U}, X]) = -e^{2u} g(U, [U, X]) \\ &= -g^{F_m}(U, [U, X]) = g^M(\nabla_U^M U, X) \\ g(\nabla_{\tilde{U}_i} \tilde{U}_i, \tilde{U}_k) &= e^u g^{F_m}(\nabla_{U_i}^{F_m} U_i, U_k) \end{aligned} \tag{4}$$

Für einen ON-Rahmen $\{\tilde{X}_i\}_i$ von Z hat der Laplaceoperator auf Funktionen lokal die Form

$$\Delta_Z = - \sum_i (\tilde{X}_i \circ \tilde{X}_i - \nabla_{\tilde{X}_i}^Z \tilde{X}_i).$$

Summation über vertikale und horizontale Vektorfelder unter Berücksichtigung von (4) ergibt

Satz 2.1. *Sei*

$$H := \sum_j T_{U_j} U_j = \sum_j \mathcal{H} \nabla_{U_j}^M U_j$$

die mittlere Krümmung der Fasern von $\pi : M \rightarrow B$ und

$$\Delta_h := - \sum_i (X_i \circ X_i - \nabla_{X_i}^M X_i)$$

für eine lokale ON-Basis von \mathcal{H} . Dann ist der Laplaceoperator $\Delta_Z : C_0^\infty(Z) \rightarrow C_0^\infty(Z)$ gegeben durch

$$(\Delta_Z \phi)(u, y) = \left(- \frac{\partial^2}{\partial u^2} + (\dim F) \frac{\partial}{\partial u} + \Delta_h + \text{Lie}_H + e^{2u} \Delta_{F_{\pi(y)}} \right) \phi(u, y) \quad (5)$$

Ab jetzt wählen wir Dirichlet-Randwerte bei $\{0\} \times M$. Die zugehörige, auf $L^2(Z)$ selbstadjungierte Erweiterung von Δ_Z (Friedrichserweiterung) werde wieder mit Δ_Z bezeichnet. Es ist bekanntlich $\text{dom } \Delta_Z = H_0^1(Z) \cap H^2(Z)$.

2.1.1 Beispiel: warped product

Sei jetzt $M = B \times F$ mit Metrik $g^M = g^B + e^{2\beta} g^F$ für eine C^1 -Funktion $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\{\hat{U}_i\}$ eine ON-Basis aus VF in F , $\{X_i\}_i$ ONR von B . Diese werden durch 0 auf $TM = TB \oplus TF$ fortgesetzt. Dann gilt $[\hat{U}, X] = 0$. Setze $U = e^{-\beta} \hat{U}$, so dass $g^M(U, U) = 1$. Wieder folgt aus der Koszulformel

$$\begin{aligned} 2g^M(\nabla_U^M U, X) &= -X(g^M(U, U)) - 2g^M([U, X], U) \\ &= -2g^M(e^{-\beta}[\hat{U}, X] - X(e^{-\beta})\hat{U}, e^{-\beta}\hat{U}) \\ &= -2X(\beta)e^{-2\beta}g^M(\hat{U}, \hat{U}) = -2X(\beta) \\ &= -2g^B(\text{grad}_B \beta, X) \end{aligned}$$

also $\mathcal{H} \nabla_U^M U = -\text{grad } \beta$, und so mit $f := \dim F$

$$H = -f \pi^* \text{grad}_B \beta,$$

Alle anderen Terme (5) bleiben unverändert, weshalb

$$\Delta_Z = - \frac{\partial^2}{\partial u^2} + f \frac{\partial}{\partial u} + \Delta_B - f \text{grad}_B \beta + e^{2u} \Delta_F$$

Im Falle eines warped product ist die horizontale Distribution integrel, $\mathcal{H} = \pi^* TB$, und die mittlere Krümmung H der Fasern ist projizierbar.

2.1.2 Beispiel: Total geodätische Fasern

Die Fasern von π seien total geodätisch. In diesem Fall sind die Fasern auch isometrisch. Es wird sich zeigen, dass Δ_h aus (5) die Eigenräume von Δ_F invariant lässt und eine Darstellung als Laplaceoperator auf Schnitten eines Hauptfaserbündels über B besitzt. Die folgenden Ausführungen finden sich im Wesentlichen bei [Bal].

Für total geodätische Fasern ist die Horizontalverschiebung $h_c : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}$ für jede stückweise glatte Kurve $c : [0, 1] \rightarrow B$ mit $c(0) = b_0$ und $c(1) = b_1$ eine Isometrie, siehe z.B. [Bes, Theorem 9.56]. Sei o ein Punkt in B . Dann sind alle Fasern F_b isometrisch zu $F := F_o$.

Sei $H \subset \text{Iso}(F)$ die Holonomiegruppe von π bei o , also die Gruppe aller Isometrien h_γ für geschlossene Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ durch $o = \gamma(0) = \gamma(1)$.

Für eine geschlossene Untergruppe $G \subset \text{Iso}(F)$ mit $H \subset G$ sei $N \rightarrow B$ das Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G und Fasern

$$N_b = \{h_c \circ g \mid g \in G\}, \quad b \in B,$$

wobei $c : [0, 1] \rightarrow B$ eine stückweise glatte Kurve von o nach b ist. Da G die Holonomiegruppe H enthält, ist N_b unabhängig von der Wahl von c definiert. Die Rechtsoperation von G auf N ist durch Komposition von rechts gegeben.

Durch Horizontalverschiebung ist ein Zusammenhang ω auf N wie folgt gegeben. Sei $c : [0, 1] \rightarrow B$ stückweise glatt und $x \in N_{c(0)}$. Wird mit $h_t : F_{c(0)} \rightarrow F_{c(1)}$ die Horizontalverschiebung entlang $c \upharpoonright [0, t]$ bezeichnet, so ist $h_t \circ x$, $0 \leq t \leq 1$ der horizontale Lift von c nach N mit Anfangspunkt x .

Sei $\mu : G \rightarrow \text{Iso}(F)$ die Inklusion. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\tau : N \times_\mu F \rightarrow M, \quad [x, p] \mapsto x(p)$$

ein Diffeomorphismus. Außerdem stimmt die von ω induzierte horizontale Distribution auf $N \times_\mu F$ mit der ursprünglichen Distribution von π überein.

Sei Δ_F der Laplaceoperator von F . Da F geschlossen ist, ist $L^2(F)$ die Hilbertraumsumme der Eigenräume von F . Betrachte die Zerlegung

$$L^2(F) = \hat{\bigoplus}_{\alpha \in A} V_\alpha$$

in paarweise orthogonale G -invariante Unterräume, so dass für jedes α die induzierte Darstellung $\varrho_\alpha : G \rightarrow U(V_\alpha)$ irreduzibel ist. Diese soll natürlich mit μ verträglich sein:

$$(\varrho_\alpha(g)\phi)(\mu(g)p) = \phi(p), \quad \phi \in V_\alpha, p \in F, g \in G.$$

Dann ist jedes V_α in einem Eigenraum von Δ_F enthalten, also insbesondere ein endlichdimensionaler euklidischer Raum. Sei $W_\alpha = N \times_{\varrho_\alpha} V_\alpha$.

Lemma 2.2. *Sei $L^2(M)^\alpha$ der Raum der Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f \circ h_c \in V_\alpha$ für alle stückweise glatten Kurven $c : [0, 1] \rightarrow B$ mit $c(0) = o$.*

Es gibt eine kanonische Bijektion

$$L^2(M)^\alpha \simeq C^\infty(B, N \times_{\varrho_\alpha} V_\alpha) \tag{6}$$

Beweis. Sei $\sigma \in C^\infty(B, N \times_{\varrho_\alpha} V_\alpha)$ gegeben, $x \in M, b = \pi(x)$. $[k, y] = \tau^{-1}(x)$. Sei $v \in V_\alpha$, so dass (k, v) Repräsentant von $\sigma(b)$ ist. Dann definiere $f(x) := v(y)$.

Sei umgekehrt eine Funktion $f \in L^2(M)^\alpha$ gegeben. Zu $b \in B$ sei $x \in F_b$ beliebig und $[k, y] = \tau^{-1}(x)$. Dann definiere $\sigma(b) := [k, v]$ mit $v \in V_\alpha, v(y) := f(x)$. \square

Mit dieser Identifikation ist

$$L^2(M) = \hat{\bigoplus}_{\alpha \in A} L^2(W_\alpha).$$

Da V_α euklidisch ist und ϱ_α unitär, besitzt W_α eine kanonische Hermitesche Metrik. Der Zusammenhang ω auf N induziert eine Hermitesche kovariante Ableitung ∇^α auf W_α . Sei Δ_α der zugehörige Laplaceoperator. Für einen lokalen orthonormalen Rahmen Y_1, \dots, Y_n von B hat dieser die Form

$$\Delta_\alpha = - \sum (\nabla_{Y_i}^\alpha \nabla_{Y_i}^\alpha - \nabla_{\nabla_{Y_i}^\alpha Y_i}^\alpha)$$

mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇^B auf B .

Wie oben sei $(U_1, \dots, U_k, X_1, \dots, X_n)$ ein lokaler orthonormaler Rahmen auf M , wobei (U_1, \dots, U_k) ein lokaler orthonormaler vertikaler Rahmen und (X_1, \dots, X_n) horizontaler Lift eines orthonormalen Rahmens von B ist. Dann ist

$$\Delta_M = - \sum_i (U_i^2 - \nabla_{U_i} U_i) - \sum_j (X_j^2 - \nabla_{X_j} X_j).$$

Da die Fasern total geodätisch sind, ist der vertikale Teil von Δ_M gerade ([Bes],[Be-Bo])

$$\Delta_{F_b} = - \sum_i (U_i^2 - \nabla_{U_i} U_i) = - \sum_i (U_i^2 - \nabla_{U_i}^F U_i),$$

also der Laplaceoperator auf den Fasern. Entsprechend ist

$$\Delta_h = - \sum_j (X_j^2 - \nabla_{X_j} X_j)$$

der horizontale Teil von Δ .

In [Bal] wird gezeigt, dass unter der Identifikation (6) der horizontale Laplaceoperator Δ_h gerade dem Laplaceoperator Δ_α in W_α entspricht.

2.2 Spitzenfunktionen

Definition 2.3. Zu einer Funktion ϕ auf Z sei $I(\phi)$ Integration längs der Faser über $b \in B$:

$$I(\phi)(u, b) := \int_{F_b} \phi(u, (b, y)) dy.$$

Sei

$$L_0^2(Z) := \{\phi \in L^2(Z) \mid I(\phi)(\cdot, b) = 0 \text{ für fast alle } b \in B\}$$

und $L_1^2(Z)$ das orthogonale Komplement von $L_0^2(Z)$ in $L^2(Z)$. Eigenfunktionen des Laplaceoperators, die in $L_0^2(Z)$ liegen, werden in Anlehnung an die Theorie klassischer automorpher Formen *Spitzenfunktionen* genannt.

Definition 2.4. (konstanter Term) Sei $\pi_2 : Z \rightarrow \mathbb{R}^+ \times B, (u, x) \mapsto (u, \pi(x))$. Zu einer Funktion ϕ auf Z sei der *konstante Term* definiert als

$$\phi_\circ := P(f) := \frac{I(\phi)}{v} \circ \pi_2$$

wobei $v : B \rightarrow \mathbb{R}^+, v := I(1)$ das Volumen der Faser über b ist.

Lemma 2.5. *Als Operator auf $L^2(Z)$ ist $P : L^2(Z) \rightarrow L_1^2(Z)$ Orthogonalprojektion.*

Beweis. Seien $\phi, \psi \in L^2(Z)$. Da das Volumen der Fasern beschränkt ist, gilt $P\phi = 0 \iff \phi \in L_0^2(Z)$. Außerdem ist P Orthogonalprojektion: Nach Fubini $P \circ P\phi = P\phi$ und

$$\begin{aligned} (P\phi, \psi)_{L^2(Z)} &= \int_0^\infty \int_B \int_{F_b} \left(\frac{1}{\text{vol}(F_b)} \int_{F_b} \phi(u, (b, x)) dx \right) \cdot \psi(u, (b, y)) dy \omega_B(b) e^{-fu} du \\ &= \int_0^\infty \int_B \int_{F_b} \phi(u, (b, x)) \cdot \left(\frac{1}{\text{vol}(F_b)} \int_{F_b} \psi(u, (b, y)) dy \right) dx \omega_B(b) e^{-fu} du \\ &= (\phi, P\psi)_{L^2(Z)} \end{aligned}$$

also insbesondere

$$(\phi - P\phi, P\phi) = (P\phi - P^2\phi, \phi) = 0.$$

□

Funktionen in $L_1^2(Z)$ sind faserweise konstant, weshalb sie mit Funktionen auf $\mathbb{R}^+ \times B$ identifiziert werden können:

Lemma 2.6. *Durch Integration längs der Fasern*

$$J(\phi) = \frac{I(\phi)}{\sqrt{v}} \tag{7a}$$

ist eine Isometrie $J : L_1^2(Z) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega_B)$ mit der Inversen

$$J^{-1}(\psi) = \frac{\psi}{\sqrt{v}} \circ \pi_2 \tag{7b}$$

gegeben.

Beweis. Sei $J_1(\psi)$ definiert durch die rechte Seite von (7b) und $\phi \in L_1^2(Z)$. Nach Definition ist $P\phi = \frac{J(\phi)}{\sqrt{I(1)}} \circ \pi_2$, woraus $J_1(J\phi) = P\phi = \phi$ und

$$\int_Z \phi^2 dz = \int_0^\infty \int_B \int_{F_b} \left(\frac{J(\phi)}{\sqrt{I(1)}} \circ \pi_2 \right)^2 dy \omega e^{-fu} du = \int_0^\infty \int_B J(\phi)^2 \omega e^{-fu} du$$

folgen. Umgekehrt gilt $JJ_1\psi = \frac{1}{\sqrt{I(1)}} I\left(\frac{\psi}{\sqrt{I(1)}} \circ \pi_2\right) = \psi$ für eine Funktion ψ auf $\mathbb{R}^+ \times B$. □

Nun soll berechnet werden, wie der Laplaceoperator auf $L_0^2(Z)$ und $L_1^2(Z)$ wirkt. Dazu wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 2.7. *Sei \bar{X} Vektorfeld auf B und X horizontaler Lift von \bar{X} auf (M, g) , sowie $\phi \in C^\infty(M)$. Dann gilt*

$$\bar{X}(I(\phi)) = I(X(\phi)) - I(\phi \cdot g(H, X)).$$

Beweis. Sei $\Phi_t^{\bar{X}}$ Fluss von \bar{X} . Der Fluss Φ_t^X von X projiziert auf diesen und ist ein Diffeomorphismus der Fasern:

$$\Phi_t^X : F_b \rightarrow F_{\Phi_t^{\bar{X}}(b)}.$$

Sei ω Volumenform der Fasern, d.h. ω ist Volumenform auf M , so dass $\omega \upharpoonright F_b$ Volumenform auf F_b ist. Es gilt nach Definition der Lieableitung

$$\bar{X} \left(\int_{F_b} \phi \omega \right) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \int_{F_{\Phi_t^{\bar{X}}(b)}} \phi \omega = \frac{d}{dt} \Big|_0 \int_{F_b} (\Phi_t^X)^* (\phi \omega) = \int_{F_b} \text{Lie}_X(\phi \omega)$$

Nach Theorem 6.6 in [La] gilt nach Einschränkung auf die Fasern

$$\text{Lie}_X(\omega) = -g(H, X)\omega.$$

Zusammen mit

$$\text{Lie}_X(\phi \omega) = X(\phi)\omega + \phi \text{Lie}_X \omega$$

folgt das Lemma. □

Satz 2.8. Sei $\phi \in C^\infty(Z) \cap L^2(Z)$. Bezüglich der Zerlegung

$$L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z),$$

d.h. für $\phi = \phi_\diamond + \phi_\circ$ mit $\phi_\diamond \in L_0^2(Z)$, $\phi_\circ = P\phi = \pi_2^* \bar{\phi}_1 \in L_1^2(Z)$, gilt

$$\begin{aligned} \Delta_Z(\phi) &= \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - P)\Delta_Z \phi_\diamond & (\mathbf{1} - P)\Delta_Z \phi_\circ \\ P\Delta_Z \phi_\diamond & P\Delta_Z \phi_\circ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_Z \phi_\diamond + P(\text{div}_M(\phi_\diamond H)) & (\mathbf{1} - P)(H(\phi_\circ)) \\ -P(\text{div}_M(\phi_\diamond H)) & (-\partial_u^2 + f\partial_u)\phi_\circ + \pi_2^*(\Delta_B \bar{\phi}_1) + P(H(\phi_\circ)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis. Sei X basic Vektorfeld, das auf \bar{X} projiziert. Für $y \in M$ sei $b = \pi(y)$. Dann gilt offenbar

$$X(\pi^* \phi)(y) = (\bar{X}\phi)(b)$$

Mit Lemma 2.7

$$\begin{aligned} X(P(\phi))(y) &= \bar{X} \left(\frac{1}{v} \right) I(\phi)(b) + \frac{1}{v} \bar{X}(I(\phi))(b) \\ &= \bar{X} \left(\frac{1}{v} \right) I(\phi) + \frac{1}{v} (I(X(\phi)) - I(\phi g(H, X))) \\ &= -\frac{\bar{X}(v)}{v^2} I(\phi) + P(X(\phi)) - P(\phi g(H, X)) \\ &= P(g(H, X))P(\phi) + P(X(\phi)) - P(\phi g(H, X)) \\ &= P(X(\phi)) - P(g(H, X)(\mathbf{1} - P)\phi) \end{aligned} \tag{8}$$

Wie in (4) gesehen, ist $\nabla_{X_i} X_i$ basic und projiziert auf $\nabla_{\bar{X}_i}^B \bar{X}_i$, so dass

$$\Delta_h \phi_\circ = (\Delta_B \bar{\phi}_1) \circ \pi_2 \in L_1^2(Z).$$

Somit

$$P\Delta_Z\phi_\circ = (-\partial_u^2 + f\partial_u)\phi_\circ + \pi_2^*(\Delta_B\bar{\phi}_1) + P(H(\phi_\circ)). \quad (9)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\Delta_F\phi_\circ \upharpoonright F = 0$.

Entsprechend

$$(\mathbf{1} - P)\Delta_Z\phi_\circ = (\mathbf{1} - P)(H(\phi_\circ)) \quad (10)$$

Die Fasern F_b sind geschlossen, weshalb $P(\Delta_F\phi_\diamond) = 0$, also

$$P(\Delta_Z\phi_\diamond) = P(H(\phi_\diamond)) + P(\Delta_h\phi_\diamond). \quad (11)$$

Es bleibt also $P(\Delta_h\phi_\diamond)$ zu berechnen. Aus (8)

$$P(X(\phi_\diamond)) = P(g(H, X)\phi_\diamond). \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P(X(X\phi_\diamond)) &\stackrel{(8)}{=} X(P(X\phi_\diamond)) + P(g(X, H)(\mathbf{1} - P)X\phi_\diamond) \\ &= X(P(g(X, H)\phi_\diamond)) + P(g(X, H)(\mathbf{1} - P)X\phi_\diamond) \\ &= P(X\{g(X, H)\phi_\diamond\} - g(X, H)(\mathbf{1} - P)(g(X, H)\phi_\diamond) \\ &\quad + g(X, H)(\mathbf{1} - P)(X\phi_\diamond)) \\ &= P(X\{g(X, H)\phi_\diamond\} - g(X, H)^2\phi_\diamond + g(X, H)X\phi_\diamond \\ &\quad + g(X, H)P(g(X, H)\phi_\diamond - X\phi_\diamond)) \\ &\stackrel{(12)}{=} P(X\{g(X, H)\phi_\diamond\} - g(X, H)^2\phi_\diamond + g(X, H)X\phi_\diamond) \\ &= P(g(\nabla_X X, H)\phi_\diamond + g(X, \nabla_X H)\phi_\diamond + 2g(X, H)X\phi_\diamond - g(X, H)^2\phi_\diamond) \end{aligned}$$

Weil auch $\nabla_X X$ basic ist:

$$P((\nabla_X X)\phi_\diamond) \stackrel{(12)}{=} P(g(\nabla_X X, H)\phi_\diamond)$$

Nun ist aber

$$\sum_i g(X_i, H)^2 = \|H\|^2, \quad \sum_i g(X_i, H)X_i\phi_\diamond = H(\phi_\diamond),$$

also

$$\begin{aligned} P\Delta_h\phi_\diamond &= -P\left(\sum_i (X_i^2 - \nabla_{X_i} X_i)\phi_\diamond\right) \\ &= -P(2H(\phi_\diamond) - \|H\|^2\phi_\diamond + \sum_i g(X_i, \nabla_{X_i} H)\phi_\diamond) \end{aligned}$$

Die Divergenz von H auf M ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M H &= \sum_i g(X_i, \nabla_{X_i} H) + \sum_j (U_j(g(U_j, H)) - g(\nabla_{U_j} U_j, H)) \\ &= \sum_i g(X_i, \nabla_{X_i} H) - \|H\|^2 \end{aligned}$$

weshalb

$$P\Delta_h\phi_\diamond = -P((\operatorname{div}_M H)\phi_\diamond + 2H(\phi_\diamond)) \quad (13)$$

Eingesetzt in (11)

$$P(\Delta_Z\phi_\diamond) = -P(H(\phi_\diamond) + (\operatorname{div}_M H)\phi_\diamond) = -P(\operatorname{div}_M(\phi_\diamond H)). \quad (14)$$

Die Behauptung folgt so aus (9), (10), (13) und (14). \square

2.3 Projizierbare mittlere Krümmung

Wir suchen nun eine hinreichende Bedingung dafür, dass Δ_Z die Zerlegung $L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z)$ invariant lässt, in der Definition von [Ka, V.3.9].

Satz 2.9. *Haben die Fasern von M projizierbare mittlere Krümmung, so sind $L_0^2(Z)$ und $L_1^2(Z)$ invariante Unterräume von Δ_Z .*

Beweis. Laut Satz 2.8 kann $\Delta_Z = \Delta_{Z;0} + T$ geschrieben werden mit

$$\Delta_{Z;0} = \begin{pmatrix} -\partial_u^2 + f\partial_u + e^{2u}\Delta_F + (\mathbf{1} - P)\Delta_h & 0 \\ 0 & -\partial_u^2 + f\partial_u + P\Delta_h \end{pmatrix}$$

und der Störung

$$T = \begin{pmatrix} (\mathbf{1} - P)H\phi_\diamond & (\mathbf{1} - P)H\phi_\circ \\ -P\operatorname{div}_M(\phi_\diamond H) & P(H\phi_\circ) \end{pmatrix}$$

Sei jetzt \bar{H} ein Vektorfeld auf B , so dass $\pi_*H = \bar{H}$. Aus Formel (8) folgt

$$\begin{aligned} H(P\phi) &= P(H\phi) - P(\|H\|^2(\mathbf{1} - P)\phi) \\ &= P(H\phi) - \|\bar{H}\|_B^2 P(\mathbf{1} - P)\phi = P(H\phi) \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\begin{aligned} PH\phi_\circ = H\phi_\circ &=: (\mathbf{1} - P)H\phi_\circ = 0 \\ PH\phi_\diamond = 0 &=: (\mathbf{1} - P)H\phi_\diamond = H\phi_\diamond \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}_M H = \sum_i g(X_i, \nabla_{X_i} H) - \|H\|^2 = \operatorname{div}_B \bar{H} - \|\bar{H}\|_B^2$$

Also auch

$$P\operatorname{div}_M(\phi_\diamond H) = P(H(\phi_\diamond) + \phi_\diamond \operatorname{div}_M H) = 0$$

Schließlich wird die Störung T zu

$$T = \begin{pmatrix} H\phi_\diamond & 0 \\ 0 & H\phi_\circ \end{pmatrix},$$

d.h. $T = \operatorname{Lie}_H$. □

Eine Klasse von Mannigfaltigkeiten mit Fasern projizierbarer mittlerer Krümmung wird in [Fal] angegeben (vgl. auch [Bes], Theorem 9.104): Eine Riemannsche Submersion ist genau dann lokal ein *warped product*, wenn die Fasern total umbilisch¹, die horizontale Distribution integabel, und die mittlere Krümmung der Fasern projizierbar sind.

Es soll noch untersucht werden, wie $\Delta_Z \upharpoonright L_1^2(Z)$ wirkt, wenn $L_1^2(Z)$ via J aus (7a) mit Funktionen auf $\mathbb{R}^+ \times B$ identifiziert wird.

¹Die Fasern einer Submersion heißen *total umbilisch*, falls es ein horizontales Vektorfeld $\nu : M \rightarrow \mathcal{H}$ gibt, so dass für die zweite Fundamentalform gilt

$$\mathbb{I}(U, V)_x = \mathcal{H}(\nabla_U^M V)_x = g_x(U, V)\nu(x), \quad \forall U, V \in T_x M$$

Satz 2.10. *Bei projizierbarer mittlerer Krümmung der Fasern gilt für $\phi \in C_0^\infty(Z) \cap L_1^2(Z)$*

$$\Delta_Z \phi = J^{-1} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + f \frac{\partial}{\partial u} + \square_B \right) J(\phi),$$

mit

$$\begin{aligned} \square_B : C^\infty(B) &\rightarrow C^\infty(B) \\ \phi &\mapsto \Delta_B \phi - \frac{1}{2} \phi \operatorname{div}_B \bar{H} + \frac{1}{4} \|\bar{H}\|^2 \phi \end{aligned}$$

Dabei besitzt \square_B eine selbstadjungierte Erweiterung als nicht-negativer elliptischer Operator auf $L^2(B)$, und diese hat rein diskretes Spektrum.

Beweis. Wie oben gesehen² gilt

$$\Delta_M P\psi = \Delta_h P\psi + H(P\psi),$$

weshalb

$$\square_B \phi = J(\Delta_h + H)J^{-1}\phi = J \left(\left(\Delta_B \left(\frac{\phi}{\sqrt{v}} \right) + \bar{H} \left(\frac{\phi}{\sqrt{v}} \right) \right) \circ \pi_2 \right) \quad (15)$$

Daraus folgt sofort

$$(\square_B \phi, \phi)_{L^2(B)} = (J\Delta_M J^{-1}\phi, \phi)_{L^2(B)} = (\Delta_M J^{-1}\phi, J^{-1}\phi)_{L^2(M)} \geq 0. \quad (16)$$

Sei X ein Vektorfeld auf B .

$$\begin{aligned} X(v) &= -g_B(\bar{H}, X)v \quad (\text{wegen Lemma 2.7}) \\ X\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) &= \frac{g_B(\bar{H}, X)}{2\sqrt{v}} \\ X\left(X\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right)\right) &= \frac{1}{2\sqrt{v}} \left(\frac{1}{2} g_B(\bar{H}, X)^2 + g_B(\nabla_X^B \bar{H}, X) + g_B(\bar{H}, \nabla_X^B X) \right) \end{aligned}$$

Für eine lokale Orthonormalbasis $\{X_i\}$ von (TB, g^B) ist $\Delta_B = -\sum_i (X_i X_i - \nabla_{X_i}^B X_i)$, also

$$\begin{aligned} \Delta_B \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \right) &= -\frac{1}{2\sqrt{v}} \sum_i \left(\frac{1}{2} g_B(\bar{H}, X_i)^2 + g_B(\nabla_{X_i}^B \bar{H}, X_i) \right) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{v}} \left(\frac{1}{2} \|\bar{H}\|_{g_B}^2 + \operatorname{div}_B \bar{H} \right) \\ \Delta_B \left(\frac{\phi}{\sqrt{v}} \right) &= \Delta_B \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \right) \phi + \frac{1}{\sqrt{v}} \Delta_B \phi - 2 \sum_i X_i \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \right) X_i \phi \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{v}} \left(\frac{1}{2} \|\bar{H}\|_{g_B}^2 + \operatorname{div}_B \bar{H} \right) \phi + \frac{1}{\sqrt{v}} \Delta_B \phi - \frac{1}{\sqrt{v}} \bar{H} \phi \end{aligned}$$

In (15)

$$\begin{aligned} \square_B \phi &= \sqrt{v} \left(\Delta_B \left(\frac{\phi}{\sqrt{v}} \right) + \bar{H} \left(\frac{\phi}{\sqrt{v}} \right) \right) \\ &= \Delta_B \phi - \frac{1}{2} \phi \operatorname{div}_B \bar{H} + \frac{1}{4} \|\bar{H}\|_{g_B}^2 \phi \end{aligned}$$

²Siehe auch Theorem 4.4 in [La].

Die letzte Aussage folgt schließlich aus (16) sowie den bekannten Eigenschaften von Δ_B , denn \square_B ist eine kompakte Störung desselben. \square

Bemerkung 2.11. Dass \square_B nicht-negativ ist, kann auch direkt eingesehen werden: Für ein Vektorfeld $X \in C^\infty(B, TB)$ und eine Funktion $u \in C^\infty(B)$ gilt ([Tay, Proposition 2.2, S. 128])

$$(X, \operatorname{grad} u)_{L^2(B)} = -(\operatorname{div} X, u)_{L^2(B)}. \quad (17)$$

Weil $\Delta = -\operatorname{div} \operatorname{grad}$, folgt

$$\begin{aligned} (\square_B u, u) &= \|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{1}{4}(u^2, \|H\|_{g_B}^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{div} H, u^2) \\ &\stackrel{(17)}{=} \|\operatorname{grad} u\|^2 + \frac{1}{4}\|uH\|^2 + (uH, \operatorname{grad} u) \\ &= \|\operatorname{grad} u + \frac{1}{2}uH\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

\diamond

2.4 Spektraltheorie

In diesem Kapitel soll die Spektraltheorie des Laplaceoperators auf Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit gefaserner Spitzenmetrik untersucht werden. Die Bezeichnungen sind wie in Kapitel 1.2.

Sei $\Delta_X : C_0^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(X)$ Laplaceoperator auf den Funktionen mit kompaktem Träger. Δ_X besitzt eine Erweiterung als selbstadjungierter Operator auf $L^2(X)$, die wir wieder mit Δ_X bezeichnen. Sofern nicht explizit anders erwähnt, wird im Folgenden nur der Fall projizierbarer mittlerer Faserkrümmung betrachtet. Dann ist die Zerlegung $L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z)$ invariant unter Δ_Z (Lemma 2.9). Ferner ist $L_1^2(Z)$ isometrisch zu $L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega_B)$, die Isometrie ist dabei durch (7a) gegeben.

Wir werden unter anderem zeigen, dass das wesentliche Spektrum von Δ_X durch Δ_Z bestimmt ist.

2.4.1 Spektrale Auflösung von $\Delta_{1,Z}$

Sei H projizierbar (d.h. basic) mit $\bar{H} := d\pi \circ H$. Dann ist $L_1^2(Z)$ laut Lemma 2.9 ein invarianter Unterraum von Δ_Z , und für die Einschränkung $\Delta_{1,Z} = \Delta_Z \upharpoonright L_1^2(Z) : L_1^2(Z) \rightarrow L_1^2(Z)$ von Δ_Z gilt

$$\Delta_{1,Z} = -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + f \frac{\partial}{\partial u} + \Delta_h + H$$

Wir identifizieren jetzt $L_1^2(Z)$ mit $L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega_B)$ mittels der Isometrie J aus (7a). Dann wirkt $\Delta_{1,Z}$ wie in Satz 2.10 als

$$\Delta_{1,Z} = J^{-1} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} + f \frac{\partial}{\partial u} + \square_B \right) J.$$

Durch $G(\phi)(u, b) = e^{-uf/2}\phi(u, b)$ ist eine Isometrie $G : L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega_B) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+ \times B)$ mit der Inversen $G^{-1}(\phi)(u, b) = e^{uf/2}\phi(u, b)$ gegeben.

Zu einer Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R}^+ \times B)$ betrachten wir die Fourierzerlegung

$$\phi(u, b) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(u) \phi_i(b) \quad (18)$$

zu einer $L^2(B)$ -Orthonormalbasis von Eigenfunktionen $\phi_i \in C^\infty(B)$ von \square_B , $a_i(u) \in L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega_B)$ mit zugehörigen Eigenwerten $\mu_i, 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \rightarrow \infty$. Diese Fourierzerlegung ist eine Isometrie

$$\mathfrak{J} : L^2(\mathbb{R}^+ \times B) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2), \quad (\mathfrak{J}\phi)(u, j) := a_j(u).$$

Die Sinustransformation

$$\mathfrak{S}(\phi)(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(ru) \phi(u) du$$

entspricht auf ungeraden Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ der Fouriertransformation:

$$\phi(-u) = -\phi(u) \forall u \in \mathbb{R} \quad =: \quad \mathfrak{S}(\phi) = i\mathfrak{F}(\phi)$$

Daraus folgt, dass $\mathfrak{S} : L^2(\mathbb{R}^+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+)$ eine Isometrie ist, und

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\phi\right)(r) &= -r^2(\mathfrak{S}\phi)(r) \\ (\mathfrak{S}^{-1}\phi)(r) &= (\mathfrak{S}\phi)(r) \end{aligned}$$

Schließlich ist durch die Substitution $\tau = r^2 + \mu_j + \frac{f^2}{4}$ eine Isometrie

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : L^2(\mathbb{R}^+, \ell^2) &\rightarrow \bigoplus_{j=0}^{\infty} L^2([\mu_j + \frac{f^2}{4}, \infty), \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}}}), \\ \mathfrak{T}(f)(\tau, j) &= a_j(\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}}) \end{aligned}$$

gegeben.

Sei $a_i \phi_i \in L^2(\mathbb{R}^+ \times B, e^{-fu} du \omega)$ ein Summand in der Fourierentwicklung (18). Dann gilt $\Delta_{1,Z}(a_i \phi_i) = (\mathfrak{S}G)^{-1}(u^2 + \frac{f^2}{4} + \mu_i) \mathfrak{S}G(a_i \phi_i)$ und durch $\mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{J}GJ$ ist die gesuchte spektrale Auflösung gegeben:

Satz 2.12. *Sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{T}\mathfrak{S}\mathfrak{J}GJ$. Dann gilt für $\varphi \in L_1^2(Z)$*

$$(\mathfrak{U}\Delta_{1,Z}\varphi)(\tau, j) = \tau(\mathfrak{U}\varphi)(\tau, j).$$

Das heißt, für

$$(\mathfrak{U}\varphi)(\tau, j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}} \cdot u) (\mathfrak{J}J\varphi)(u, j) e^{-uf/2} du.$$

gilt für $x \in F_b$

$$(\Delta_{1,Z}\varphi)(u, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{f^2}{4} + \mu_j}^{\infty} \tau e^{uf/2} \sin(\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}} \cdot u) (\mathfrak{U}\varphi)(\tau, j) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}}} \cdot J^{-1}(\phi_j(b))$$

Insbesondere gilt

Satz 2.13. *Die mittlere Krümmung der Fasern $\pi : M \rightarrow B$ sei projizierbar. Die Eigenwerte von \square_B seien $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \rightarrow \infty$. Dann hat die Einschränkung von Δ_Z auf $L_1^2(Z)$ rein absolutstetiges Spektrum $[\frac{f^2}{4} + \mu_1, \infty)$ mit Verzweigungspunkten bei $\frac{f^2}{4} + \mu_j, j \geq 1$. Die Vielfachheit des Spektrums bei λ ist $\#\{j \mid \frac{f^2}{4} + \mu_j \leq \lambda\}$.*

2.4.2 Wesentliches Spektrum von Δ_Z

Es soll das wesentliche Spektrum von Δ_Z untersucht werden. Dabei wird wie in [Lo] vorgegangen. In diesem Kapitel wird keine weitere Bedingung an H gestellt, insbesondere muss H nicht projizierbar sein.

Zunächst bemerken wir

Satz 2.14. *Die Resolvente von*

$$\Delta_Z \upharpoonright L_0^2(Z) : L_0^2(Z) \rightarrow L_0^2(Z)$$

ist kompakt.

Beweis. Sei dazu wie im Minimax-Prinzip ([RS-4], Theorem XIII.1) für einen nach unten beschränkten symmetrischen Operator A definiert

$$\mu_n(A) = \sup_{\phi_1, \dots, \phi_n \in Q(A)} \inf_{\substack{\psi \perp \phi_1, \dots, \phi_n \\ \|\psi\|=1}} (A\psi, \psi).$$

Dabei ist $Q(A)$ Definitionsbereich der quadratischen Form von A .

Sei

$$V = (e^{2u}\Delta_F + (\mathbf{1} - P)(\Delta_h + H))(\mathbf{1} - P),$$

also

$$\Delta_Z = (-\partial_u^2 + f\partial_u)(\mathbf{1} - P) + V$$

als Summe quadratischer Formen. Zuerst zeigen wir, dass für $\phi \in C_0^\infty([a, \infty) \times M) \cap L_0^2(Z)$ mit $\|\phi\|_{L^2(Z)}^2 = 1$ gilt

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (V\phi, \phi)_{L^2(Z)} = \infty. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (V\phi, \phi)_{L^2(Z)} &= (e^{2u}\Delta_F\phi, \phi)_{L^2(Z)} + ((\mathbf{1} - P)(\Delta_h + H)\phi, \phi)_{L^2(Z)} \\ &\geq e^{2a}(\Delta_F\phi, \phi)_{L^2(Z)} + ((\mathbf{1} - P)(\Delta_h + H)\phi, \phi)_{L^2(Z)} \end{aligned}$$

Der zweite Summand in der letzten Zeile ist nach unten beschränkt. Es genügt also,

$$(\Delta_{F_b}(\phi \upharpoonright F_b), \phi \upharpoonright F_b)_{L^2(F_b)} \geq k > 0 \quad \text{für } \phi \in C_0^\infty([a, \infty) \times M) \cap L_0^2(Z)$$

zu zeigen. Nun ist aber $\phi \in L_0^2(Z) : \Leftarrow: (\phi \upharpoonright F_b) \perp \ker \Delta_{F_b}$ für fast alle $b \in B$, also

$$(\Delta_{F_b} \phi, \phi)_{L^2(F_b)} \geq \mu_1(\Delta_{F_b}).$$

Laut Lemma 2.15 ist $\mu_1(\Delta_{F_b})$ eine stetige positive Funktion auf der kompakten Mannigfaltigkeit B , also auch $k := \min_{b \in B} \mu_1(F_b) > 0$.

Aus der Eigenschaft (19) folgt jetzt, dass die Resolvente von $\Delta_Z \upharpoonright L_0^2(Z)$ kompakt ist. Nach [RS-4], Theorem XIII.64 genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta_Z \upharpoonright L_0^2(Z)) = \infty.$$

Sei dazu

$$T_{c,a} = -\partial_u^2 + f\partial_u + c\chi_a(u), \quad \chi_a(u) = \begin{cases} -1 & u \in [0, a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$T_{c,a}$ ist Störung mit kompaktem Träger von $-\partial_u^2 + f\partial_u$, hat also das gleiche wesentliche Spektrum $[f^2/4, \infty)$ wie $-\partial_u^2 + f\partial_u$. Δ_Z ist nach unten beschränkt, $(\Delta_Z \phi, \phi) > c_0 \|\phi\|^2$ mit $c_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $\phi \in \text{dom}(\Delta_Z)$, $\|\phi\|_{L^2(Z)} = 1$ und $c_1 = \min\{0, |c_0|\}$. Wir wählen $c > 0$ beliebig. Wegen (19) gibt es ein $a > 0$, so dass für alle $\psi \in C_0^\infty([a, \infty) \times M) \cap L_0^2(Z)$ mit $\|\psi\|_{L^2(Z)}^2 = 1$ gilt $(V\psi, \psi) \geq c$.

Daraus folgt für $\psi = \phi$

$$(\Delta_Z \phi, \phi) \geq c - c_1 + (T_{c,a} \phi, \phi), \quad \phi \in \text{dom} \Delta_Z, \|\phi\| = 1. \quad (20)$$

Wegen $Q(T_{c,a}) \supset Q(\Delta_Z)$ bedeutet (20)

$$\mu_n(\Delta_Z) \geq c - c_1 + \mu_n(T_{c,a}).$$

Aber $T_{c,a}$ hat das wesentliche Spektrum $[f^2/4, \infty)$. Also gibt es ein N , so dass $\mu_n(T_{c,a}) > 0$ für $n > N$, womit

$$\mu_n(\Delta_Z) > c - c_1 \quad \text{für } n > N.$$

Weil c beliebig gewählt war, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\Delta_Z) = \infty$. Damit hat Δ_Z kompakte Resolvente, also Δ_Z reines Punktspektrum. \square

Obiger Beweis hat eine Aussage über den kleinsten Eigenwert von Δ_{F_b} verwendet, die hier noch bewiesen wird:

Lemma 2.15. *Sei $\mu_1(b) > 0$ kleinster positiver Eigenwert von Δ_{F_b} . $\mu_1(b)$ ist stetig in $b \in B$.*

Beweis. Sei $o \in B$ beliebiger Basispunkt, c Kurve in B mit $c(0) = o, c(1) = b$ und $\sigma_c : F_o \rightarrow F_b$ horizontaler Lift von c . σ_c ist Diffeomorphismus der Fasern (siehe [Bes]). Sei $g_o = g^{F_o}$ die Riemannsche Metrik auf F_o . Eine weitere Riemannsche Metrik auf F_o ist gegeben durch

$$g_o^b := \sigma_c^* g^{F_b}$$

Analog zu [Bak] definieren wir die Distanz von g_o und g_o^b durch

$$\varepsilon(g_o^b, g_o)^2 := \sup\{|g_o(v, v) - g_o^b(v, v)| \mid x \in F_o, v \in T_x F_o, g_o(v, v) = 1\}$$

Nach Voraussetzung sind die Fasermetriken g^{F_b} glatt in b , insbesondere ist $\varepsilon(g_o^b, g_o)^2$ stetig in b , also auch $\lim_{b \rightarrow o} \varepsilon(g_o^b, g_o)^2 = 0$. Aus Theorem 4.14 in [Bak] folgt

$$\lim_{b \rightarrow o} \mu_1(\Delta_{F_o}, g_o^b) = \mu_1(\Delta_{F_o}, g_o)$$

Weil (F_o, g_o^b) und (F_b, g^{F_b}) nach Konstruktion isospektral sind, folgt die Behauptung. \square

Die beiden Nebendiagonalterme

$$\begin{aligned} & (\mathbf{1} - P)HP : L_1^2(Z) \cap H^1(Z) \rightarrow L_0^2(Z) \\ \text{und} \quad & -P(H + \operatorname{div}_M \mathbf{1})(\mathbf{1} - P) : L_0^2(Z) \cap H^1(Z) \rightarrow L_1^2(Z) \end{aligned}$$

sind beschränkt, denn sie sind bereits als Operatoren auf $L^2(M) \cap H^1(M) \rightarrow L^2(M)$ stetig.

Außerdem hat $P\Delta_Z P = (-\partial_u^2 + f\partial_u)P + \Delta_h P + PHP$ rein absolutstetiges Spektrum: $\Delta_h P + PHP$ ist ein nach unten beschränkter, selbstadjungierter elliptischer Operator auf M und hat somit reines Punktspektrum mit Eigenwerten

$$-\infty < \mu'_0 \leq \mu'_1 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Das Spektrum von $P\Delta_Z P$ ist somit $\bigsqcup_i [f^2/4 + \mu'_i, \infty)$.

Sei jetzt

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} (-\partial_u^2 + f\partial_u + e^{2u}\Delta_F + (\mathbf{1} - P)(\Delta_h + H))(\mathbf{1} - P) & 0 \\ 0 & (-\partial_u^2 + f\partial_u)P + \Delta_h P + PHP \end{pmatrix}$$

Dann gilt der

Satz 2.16. Δ_Z und \mathfrak{L} haben das gleiche wesentliche Spektrum.

Beweis. Der Beweis folgt dem Beweis von Theorem 2 in [Lo]. Sowohl Δ_Z als auch \mathfrak{L} sind selbstadjungiert und nach unten beschränkt, deshalb gibt es ein $k > 0$, so dass $(-\infty, k]$ in der Resolventenmenge von Δ_Z und von \mathfrak{L} enthalten ist. Es wird gezeigt, dass für hinreichend grosses $k > 0$ die Differenz der Resolventen

$$(\Delta_Z + k\mathbf{1})^{-1} - (\mathfrak{L} + k\mathbf{1})^{-1} \tag{21}$$

kompakt ist. Die Behauptung folgt dann aus Theorem XIII.14 in [RS-4]

Unter der Annahme, dass α und $\eta := \delta - \gamma\alpha^{-1}\beta$ invertierbar sind, gilt die Identität

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} + \alpha^{-1}\beta\eta^{-1}\gamma\alpha^{-1} & -\alpha^{-1}\beta\eta^{-1} \\ -\eta^{-1}\gamma\alpha^{-1} & \eta^{-1} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Wir schreiben jetzt

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \Delta_Z + k\mathbf{1} : L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z) \rightarrow L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z).$$

Für hinreichend grosses k sind α und δ invertierbar, und wegen Satz 2.14 ist α^{-1} kompakt. Ferner gilt $\|\alpha^{-1}\| \leq \frac{1}{k+c_0}$, wobei c_0 der kleinste Eigenwert von α ist. Entsprechend ist $\|\delta^{-1}\| \leq \frac{1}{k+\mu_0'}$ mit dem kleinsten Eigenwert μ_0' von $\Delta_h P + PHP$.

Um zu sehen, dass $\eta := \delta - \gamma\alpha^{-1}\beta$ invertierbar ist, schreiben wir

$$\eta = \delta(\mathbf{1} - X) \quad \text{mit} \quad X = \delta^{-1}\gamma\alpha^{-1}\beta$$

Wie wir oben gesehen haben, sind β und γ stetige Operatoren, also ist X als Produkt von beschränkten Operatoren mit dem kompakten Operator α^{-1} selbst kompakt. Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren $\|\alpha^{-1}\|$ und $\|\delta^{-1}\|$ gegen 0. Damit kann k so groß gewählt werden, dass $\|X\| < \frac{1}{2}$ und $\|\delta^{-1}\| < 1$. Dann ist auch η invertierbar, und η^{-1} ist beschränkt:

$$\eta^{-1} = (\mathbf{1} - X)^{-1}\delta^{-1}, \quad \text{wobei} \quad \|(\mathbf{1} - X)^{-1}\| < 2$$

Damit sind in (22) alle Terme bis auf η^{-1} unten rechts kompakte Operatoren.

Für $\mathfrak{L} + k\mathbf{1}$ lautet die entsprechende Zerlegung

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} := \mathfrak{L} + k\mathbf{1} \quad =: \quad (\mathfrak{L} + k\mathbf{1})^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass die Differenz (21) kompakt ist, bleibt also nur noch die Kompaktheit von

$$\eta^{-1} - \delta^{-1} = ((\mathbf{1} - X)^{-1} - \mathbf{1})\delta^{-1}$$

zu zeigen. Aber nach Wahl von k ist $\|X\| < \frac{1}{2}$, so dass die formale Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} X^j$ konvergiert. Weil X kompakt ist, ist ihr Grenzwert $((\mathbf{1} - X)^{-1} - \mathbf{1})$ auch kompakt. \square

2.4.3 Spektrum von Δ_X

Ab jetzt sei die mittlere Krümmung H der Fasern wieder projizierbar.

Sei $\Delta_{X;D}$ Laplaceoperator auf X mit Dirichlet-Randwerten bei $\{0\} \times M$, d.h. $\Delta_{X;D}$ ist die Friedrichserweiterung von $\Delta_X : C_0^\infty(X \setminus (\{0\} \times M)) \rightarrow C_0^\infty(X \setminus (\{0\} \times M))$. Dieser zerfällt in die direkte Summe $\Delta_{X;D} = \Delta_{X_0;D} \oplus \Delta_Z$.

Die Wellenoperatoren $W^\pm(\Delta_X, \Delta_{X;D})$ sind definiert durch

$$W^\pm(\Delta_X, \Delta_{X;D}) = s - \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{i\Delta t} J e^{-i\Delta_{X;D} t} P_{ac}(\Delta_{X;D})$$

mit der Inklusion $J : \text{dom } \Delta_{X;D} \hookrightarrow \text{dom } \Delta_X$ und der Projektion P_{ac} auf den absolutstetigen Unterraum von $\Delta_{X;D}$ in $L^2(X)$. Falls die Wellenoperatoren existieren, so stellen sie partielle Isometrien $W^\pm : P_{ac}(\Delta_{X;D}) \rightarrow \text{im } W^\pm$, also Isometrien auf dem Komplement von $\ker W^\pm$, dar.

In diesem Fall heißen W^\pm *vollständig*, wenn $\text{im } W^\pm = \text{im } P_{ac}(\Delta_X)$. Offenbar gilt: Wenn die Wellenoperatoren vollständig sind, sind $W^\pm : \text{im } P_{ac}(\Delta_{X;D}) \rightarrow \text{im } \Delta_X$ unitäre Äquivalenzen, insbesondere haben $\Delta_{X;D}$ und Δ_X das gleiche absolutstetige Spektrum.

Es gibt nun mehrere Methoden, die Existenz und Vollständigkeit von W^\pm zu zeigen. Die meisten Informationen liefert in unserem Fall die Methode von Enns, siehe z.B. [Ba-Wo], [Mu2], [Hus]. Über die Existenz und Vollständigkeit hinaus ergibt diese, dass das singulärstetige Spektrum von Δ_X leer ist, sowie dass das Punktspektrum von Δ_X keine Häufungspunkte außerhalb von $\sigma(\Delta_{X;D})$ hat.

Die Argumentation im Falle einer Mannigfaltigkeit mit gefaseter Spitzenmetrik ist analog zu [Mu2], Kapitel 6, deshalb soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Wir haben gesehen, dass $\Delta_Z = \Delta_{0;Z} \oplus \Delta_{1;Z}$ und dass $\Delta_{0;Z}$ reines Punktspektrum hat. Der absolutstetige Anteil von $\text{dom } \Delta_X$ ist also unitär äquivalent zu $L_1^2(Z)$.

2.5 Verallgemeinerte Eigenfunktionen

Im Folgenden wird immer angenommen, dass die mittlere Krümmung H von der Fasern von $M \rightarrow B$ projizierbar ist. Dann zerfällt $L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z)$ in Δ_Z -invariante Unterräume.

2.5.1 Parametrix der Resolvente

Sei $X_1 = X_0 \cup ([0, 1] \times M)$ und sei \hat{X} eine geschlossene Mannigfaltigkeit, in die X_1 isometrisch eingebettet ist. Für den Laplaceoperator $\Delta_{\hat{X}}$ auf \hat{X} ist die Resolvente $(\Delta_{\hat{X}} - \lambda)^{-1}$ eine meromorphe Funktion in $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Polen bei den Eigenwerten von $\Delta_{\hat{X}}$. Sei $Q_1(x, x', \lambda)$ die Einschränkung des Kerns der Resolvente $(\Delta_{\hat{X}} - \lambda)^{-1}$ auf $X_1 \times X_1$. Dies ist der innere Teil der Parametrix. Der äußere Teil ist durch die Resolvente von Δ_Z gegeben, $Q_2(\lambda) = (\Delta_Z - \lambda)^{-1}$. Diese soll jetzt näher untersucht werden.

Weil die Zerlegung $L^2(Z) = L_0^2(Z) \oplus L_1^2(Z)$ invariant unter Δ_Z ist, gilt für die Resolvente

$$Q_2(\lambda) = (\Delta_Z - \lambda)^{-1} = (\Delta_{Z,0} - \lambda)^{-1} + (\Delta_{Z,1} - \lambda)^{-1}.$$

Wie wir in Satz 2.14 gesehen haben, ist $(\Delta_{Z,0} - \lambda)^{-1}$ kompakt als Operator in $L^2(Z)$.

Das Spektrum von $\Delta_{Z,1}$ ist $[\frac{f^2}{4} + \nu_0, \infty)$, mit Verzweigungen bei $\frac{f^2}{4} + \nu$ für jeden Eigenwert ν von \square_B . Sicher ist $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ in der Resolventenmenge von $\Delta_{Z,1}$ enthalten. Zuerst wird der Integralkern von $(\Delta_{Z,1} - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ explizit berechnet.

Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.12 sei $T = \mathfrak{S}\mathfrak{J}GJ$. Wie in der Herleitung zu diesem Satz gesehen, gilt $(T\Delta_{1,Z}f)(u, j) = (u^2 + \frac{f^2}{4} + \mu_j)(Tf)(u, j)$ für $f \in C_0^\infty(Z) \cap L_1^2(Z)$. Wieder sei $\{\phi_j\}$ eine $L^2(B)$ -ONB aus Eigenfunktionen von \square_B .

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ und m Multiplikation mit $m(u, j) := (u^2 + \frac{f^2}{4} + \mu_j - \lambda)$, sowie $y \in F_b$.

$$\begin{aligned} ((\Delta_1 - \lambda)^{-1}\phi)(u, y) &= (J^{-1}G^{-1}\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{S}^{-1}m^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{J}GJ\phi)(u, y) \\ &= e^{f/2u} \sum_j \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(ru) (m^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{J}GJ\phi)(\cdot, r) dr \right) (J^{-1}\phi_j)(y) \\ &= \int_0^\infty \int_M K(\lambda, (u, y), (r, z)) \phi(r, z) dz e^{-fr} dr \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} K(\lambda, (u, y), (r, z)) &= \sum_{j=0}^\infty \frac{e^{f/2(u+r)}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(e^{iu\xi} - e^{-iu\xi})(e^{-i\xi r} - e^{i\xi r})}{\xi^2 + f^2/4 + \mu_j - \lambda} d\xi (J^{-1}\phi_j)(y) \otimes (J^{-1}\bar{\phi}_j)(z) \end{aligned}$$

Alle auftretenden Summen und Integrale können hier vertauscht werden. Verwendet wurde außerdem

$$(\mathfrak{J}J\phi)(u, j) = \int_B (J\phi)(u, b) \phi_j(b) \omega(b) = \int_M f(u, z) J^{-1}\phi_j(z) dz = (\phi, J^{-1}\phi_j)_{L^2(M)}$$

Das innere Integral kann mit dem Residuensatz berechnet werden, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} K(\lambda, (u, y), (r, z)) &= \sum_{j=0}^\infty \frac{i}{2} e^{f/2(u+r)} \frac{e^{i|u-r|\sqrt{\lambda-f^2/4-\mu_j}} - e^{i(u+r)\sqrt{\lambda-f^2/4-\mu_j}}}{\sqrt{\lambda-f^2/4-\mu_j}} (J^{-1}\phi_j)(y) \otimes (J^{-1}\bar{\phi}_j)(z) \end{aligned} \quad (23)$$

Der Integralkern $Q_2(\lambda, x_1, x_2)$ von $Q_2(\lambda)$ schließlich ist gegeben durch

$$Q_2(\lambda, x_1, x_2) = K(\lambda, x_1, x_2) + \sum_i \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \psi_i(x_1) \otimes \overline{\psi_i(x_2)}$$

mit den Eigenwerten λ_i von $\Delta_{Z,0}$ und zugehörigen Eigenfunktionen ψ_i .

Seien $\xi_1, \xi_2, \chi_1, \chi_2$ geeignete Abschneidungsfunktionen mit den Eigenschaften³

$$\begin{aligned} \chi_1 + \chi_2 &= 1 \\ \xi_j(x) &= 1 \quad \text{für } x \in \text{supp } \chi_j \\ \text{dist}(\text{supp } \nabla \xi_j, \text{supp } \chi_j) &\geq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Dann definieren wir einen Operator $Q(\lambda) : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ durch seinen Integral-kern

$$Q(\lambda, x_1, x_2) = \chi_1(x_1) Q_1(\lambda, x_1, x_2) \xi_1(x_2) + \chi_2(x_1) Q_2(\lambda, x_1, x_2) \xi_2(x_2).$$

Aus dieser Formel folgt völlig analog zu [Hus], Kapitel 3.1, (bzw. [Mu1]) dass

$$Q(\lambda)(\Delta_X - \lambda) = \text{Id} + \mathcal{K}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$$

³siehe z.B. [APS]

wobei die $\mathcal{K}(\lambda)$ kompakte Operatoren in $L^2(X)$ sind, sowie dass

$$(\Delta_X - \lambda)^{-1} - Q(\lambda)$$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ eine in λ meromorphe Familie kompakter Operatoren sind. Damit ist $Q(\lambda)$ Parametrix von $(\Delta_X - \lambda)^{-1}$.

2.5.2 Analytische Fortsetzung der Resolvente

Die Wurzelfunktionen $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda - f^2/4 - \mu_j}$ aus (23) sind in der geschlitzten komplexen Ebene $\mathbb{C} \setminus [f^2/4 + \mu_j, \infty)$ holomorph und lassen sich nicht auf ganz \mathbb{C} holomorph fortsetzen.

Sei $\mathcal{J} = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine diskrete Menge reeller Zahlen, mit $-\infty < \tau_0 < \tau_1 < \dots$. Wir erinnern an die Konstruktion der *Spektralen Fläche* Σ_s , einer Riemannschen Fläche, auf der alle Wurzelfunktionen $z \mapsto \sqrt{z - \tau_i}$ holomorph sind.

Wie in [Glp] sei

$$\Sigma_s = \left\{ \Lambda = (\Lambda_\mu) \in \mathbb{C}^{\#\mathcal{J}} \mid \forall \mu, \nu \in \mathcal{J} : \Lambda_\mu^2 + \mu = \Lambda_\nu^2 + \nu \right\}$$

und die Projektion $\pi_s : \Sigma_s \rightarrow \mathbb{C}$, $\pi_s(\Lambda) = \Lambda_\mu^2 + \mu$. (Σ_s, π_s) ist eine unendlichblättrige Überlagerung von \mathbb{C} mit Verzweigungspunkten in I .

Für $\mu \in \mathcal{J}$ sind dann die Wurzelfunktionen gegeben durch

$$\sqrt{\Lambda - \mu} := \Lambda_\mu. \quad (24)$$

Schließlich sei der *physikalische Bereich* FP, das Blatt der “positiven” Wurzeln, definiert als

$$\text{FP} := \{ \Lambda \in \Sigma_s \mid \forall \mu \in \mathcal{J} : \text{Im } \Lambda_\mu > 0 \}.$$

Dieser lässt sich mittels π_s mit $\mathbb{C} \setminus [\tau_0, \infty)$ identifizieren. Sein Rand zerfällt in zwei Halbgeraden $\partial_\pm \text{FP} \simeq [\tau_0, \infty)$. Dabei bedeutet $\Lambda \in \partial_\pm \text{FP}$, dass $\pi_s^{-1}(\pi_s(\Lambda) \pm i\varepsilon) \rightarrow \Lambda$ für $\varepsilon \rightarrow 0$.

Schließlich sei Σ_s^μ für $\mu \in \mathcal{J}$ die Zusammenhangskomponente von FP in $\pi_s^{-1}(\mathbb{C} \setminus [\tau_0, \infty))$.

Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Sigma_s)$ wird durch Monodromien $\gamma_\mu : \Sigma_s \rightarrow \Sigma_s$, die die Relationen

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\nu \gamma_\mu, \quad \gamma_\mu^2 = \text{id}, \quad \mu \neq \nu \in \mathcal{J}$$

erfüllen, erzeugt. Die Wurzeln (24) verhalten sich wie folgt unter Anwendung von γ_μ :

$$\sqrt{\gamma_\mu \Lambda - \mu} = -\sqrt{\Lambda - \mu}, \quad \sqrt{\gamma_\mu \Lambda - \nu} = \sqrt{\Lambda - \nu}, \quad \mu \neq \nu \quad (25)$$

In unserem Fall ist nun $\mathcal{J} = \{\mu + \frac{f^2}{4} \mid \mu \in \sigma(\square_B)\}$. Auf der zugehörigen Spektralen Fläche Σ_s sind alle Wurzelfunktionen aus (23) holomorph. Außerhalb von FP definiert der Integralkern aus (23) keinen stetigen Operator in $L^2(X)$. Deshalb betrachten wir *gewichtete* Funktionenräume, auf die eine Fortsetzung als stetiger Operator möglich ist.

Definition 2.17. Zu $\delta \in \mathbb{R}$ sei die Wichtung ω einer Funktion $\phi : Z \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\omega_\delta(\phi)(u, y) := e^{\delta u} \phi(u, y)$$

Der zugehörige gewichtete L^2 -Raum ist

$$L_\delta^2(Z) = \{\phi : Z \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ messbar und } \omega_\delta(\phi) \in L^2(Z)\}$$

Es gilt für $\delta > 0$

$$L_\delta^2(Z) \subset L^2(Z) \subset L_{-\delta}^2(Z)$$

Für $\tau > 0$ sei $D_\tau(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \tau\}$ und $\tilde{\mu}(\tau)$ der kleinste Eigenwert von \square_B mit $\tilde{\mu}(\tau) + \frac{f^2}{4} > \tau$.

$$\Omega_\tau = (\text{FP} \cup \pi_s^{-1}(D_\tau(0))) \cap \Sigma_s^{\tilde{\mu}(\tau)}$$

Sei $\delta > 0$ mit $\delta^2 > \tau$. Dann ist $|\text{Im} \sqrt{\Lambda - \frac{f^2}{4} - \nu}| < \delta$ für $\Lambda \in \Omega_\tau$ und $\nu \leq \tau$. Es folgt

Lemma 2.18. Für alle $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ mit $\delta^2 > \varepsilon$ besitzt die Parametrix $Q(\lambda)$ eine Fortsetzung zu einer meromorphen Familie stetiger Operatoren $Q(\Lambda) : L_\delta^2(X) \rightarrow L_{-\delta}^2(X)$, $\Lambda \in \Omega_\varepsilon$.

Wie in [Hus], Theorem 3.24 folgt so

Theorem 2.19. Für $\delta > \varepsilon > 0$ lässt sich die Resolvente $(\Delta - \lambda)^{-1}$ analytisch zu einer in $\Lambda \in \Omega_\varepsilon$ meromorphen Familie von Operatoren $R(\Lambda) \in \mathcal{B}(L_\delta^2(X), L_{-\delta}^2(X))$ fortsetzen.

2.5.3 Verallgemeinerte Eigenfunktionen

In diesem Kapitel sollen die verallgemeinerten Eigenfunktionen von Δ_X konstruiert werden. In der Terminologie von [Gel] ist eine verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ_X zum Eigenwert λ eine lineares Funktional F_λ auf $L^2(X)$ so dass

$$F_\lambda(\Delta_X \varphi) = \lambda F_\lambda \varphi \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(X).$$

Ein System von verallgemeinerten Eigenfunktionen heisst *vollständig*, falls aus $F_\lambda = 0$ folgt, dass $\varphi = 0$.

Satz 2.12 auf Seite 24 besagt, dass

$$\begin{aligned} \text{SIN}_{\mu_j}((u, y), \phi_j, \lambda) &:= e^{uf/2} \sin\left(\sqrt{\lambda - \mu_j - \frac{f^2}{4}} \cdot u\right) (J^{-1} \phi_j)(y), \\ y \in F_b, \quad j \in \mathbb{N}, \lambda &\geq \mu_j + \frac{f^2}{4}, \square_B \phi_j = \mu_j \phi_j, \|\phi_j\|_{L^2(B)} = 1 \end{aligned} \quad (26)$$

ein vollständiges System von verallg. Eigenfunktionen von $\Delta_{1,Z}$ bilden. Dabei werden die Funktionen als Distributionskern aufgefasst, d.h. das zugehörige Funktional lautet

$$\mathfrak{U} : \varphi \mapsto (\mathfrak{U}\varphi)(\lambda, j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_M \text{SIN}_{\mu_j}((u, x), \phi_j, \lambda) \cdot \overline{\varphi(u, x)} dx e^{-fu} du$$

Jeder Eigenfunktion ψ zum Eigenwert μ von \square_B wird jetzt eine verallgemeinerte Eigenfunktion von Δ_X zugeordnet.

Sei χ eine Abschneidefunktion mit $\chi(0) = 0, \chi(1) = 1$. Für $(u, y) \in \mathbb{R}^+ \times M$ und $\Lambda \in \Sigma_s$ definieren wir⁴

$$e_\mu^\pm((u, y), \psi, \Lambda) := e^{(f/2 \pm i\sqrt{\Lambda - \mu - f^2/4})u} \frac{\psi(\pi(y))}{\sqrt{\text{vol}(F_{\pi(y)})}}.$$

Wir setzen χe_μ^\pm durch 0 auf X fort. Dann ist $\chi e_\mu^\pm \in C^\infty(X)$ und es gilt im Distributionensinn für $(u, y) \in [1, \infty) \times M$

$$\Delta_{\text{loc}}(\chi e_\mu^\pm)((u, y), \psi, \Lambda) = (\Lambda_\mu^2 + \mu + f^2/4)e_\mu((u, y), \psi, \Lambda) = \pi_s(\Lambda)(\chi e_\mu^\pm)((u, y), \psi, \Lambda)$$

Insbesondere ist $(\Delta_{\text{loc}} - \pi_s(\Lambda))(\chi e_\mu^\pm)(\psi, \Lambda) \in C_0^\infty(X)$ und somit im Definitionsbereich der analytischen Fortsetzung der Resolvente von Δ_X . Schließlich ist die verallgemeinerte Eigenfunktion definiert als

$$E_\mu(z, \psi, \Lambda) = \chi(z)e_\mu^-(z, \psi, \Lambda) - (\Delta_X - \Lambda)^{-1}(\Delta_{\text{loc}} - \pi_s(\Lambda))(\chi e_\mu^-)(z, \psi, \Lambda). \quad (27)$$

Die Funktionen $E_\mu(z, \psi, \Lambda)$ sind auch eindeutig durch die drei folgenden Eigenschaften definiert:

- 1) $E_\mu(\cdot, \psi, \Lambda) \in C^\infty(X)$ für alle $\Lambda \in \Sigma_s$, und $E_\mu(\psi, \Lambda)$ ist meromorph in Λ
- 2) $(\Delta_{\text{loc}} - \pi_s(\Lambda))E_\mu(\psi, \Lambda) = 0$ für alle $\Lambda \in \Sigma_s$.
- 3) $E_\mu(\cdot, \psi, \Lambda) - e_\mu^-(\cdot, \psi, \Lambda) \in L^2(X)$ für $\Lambda \in \text{FP}$.

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu [Mu2]. Punkt 1) folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Resolvente und der elliptischen Regularität; Eigenschaft 2) und 3) folgen aus der Definition (27) von E .

Zur Eindeutigkeit nehmen wir an, dass es eine zweite Funktion G mit den Eigenschaften 1)-3) gäbe. Dann gilt

$$(\Delta_{\text{loc}} - \pi_s(\Lambda))(E - G)(\Lambda) = 0$$

und $(E - G)(\Lambda) \in L^2(X)$ für $\Lambda \in \text{FP}$ wegen 3). Aber $\pi_s(\Lambda) \notin \mathbb{R}$ ist ein Widerspruch zur Selbstadjungiertheit von Δ , weshalb $E = G$. \square

Entwicklung des konstanten Terms nach Eigenfunktionen von \square_B ergibt die folgende asymptotische Entwicklung.

Satz 2.20. *Sei $\mu \in \sigma(\square_B)$. Für jedes $\mu \in \sigma(\square_B)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ ist der konstante Term von $E_\mu(\phi, \lambda)$ gegeben durch*

$$PE_\mu(\cdot, \phi, \lambda) \upharpoonright Z = e_\mu^-(\phi, \lambda) + \sum_{\nu \in \sigma} e_\nu^+(T_{\mu\nu}(\lambda, \phi), \lambda)$$

Dabei sind die $T_{\mu\nu} : \mathcal{E}_\mu \rightarrow \mathcal{E}_\nu$ lineare, in λ meromorphe Abbildungen zwischen den Eigenräumen des horizontalen Laplaceoperators \square_B .

⁴Die Normierung mit $\text{vol } F$ ist so gewählt, dass $\text{SIN}_\mu = \frac{1}{2i}(e_\mu^+ - e_\mu^-)$, $\lambda > f^2/4 + \mu$. Außerdem ist $Pe_\pm = e_\pm$.

Wie im Fall einer Mannigfaltigkeit mit zylindrischem Ende können jetzt die Wellenoperatoren von $(\Delta_X, \Delta_{X,D})$ durch die verallgemeinerten Eigenformen ausgedrückt werden. Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.12 gilt völlig analog zu Theorem 8.25 in [Mu2]:

Satz 2.21. *Sei $\gamma(\tau) = \prod_{\mu < \tau} \gamma_\mu$. Sei $(\hat{\varphi}_j) \in \bigoplus_{j=1}^{\infty} C_0^\infty((\frac{f^2}{4} + \mu_j, \infty))$ und $\varphi = \mathfrak{U}^*((\hat{\varphi}_j))$. Dann gilt*

$$W^+(\Delta_X, \Delta_{X,D})\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{f^2}{4} + \mu_j}^{\infty} E_{\mu_j}(\phi_j, \gamma(\tau)\tau) \hat{\varphi}_j(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}}}$$

$$W^-(\Delta_X, \Delta_{X,D})\varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{f^2}{4} + \mu_j}^{\infty} E_{\mu_j}(\phi_j, \tau) \hat{\varphi}_j(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - \mu_j - \frac{f^2}{4}}}$$

Es folgt wie dort, dass die $E_\mu(\phi)$ ein vollständiges System verallgemeinerten Eigenformen von Δ_X bilden.

3 Differentialformen

3.1 Glattes Faserbündel

Für weitere Details siehe [Bi-Lo], S. 323-329 und [Bi-Ch], S. 53-55.

Sei TF das Vertikale Tangentialbündel, also $(TF)_y = T_y F_{\pi(y)}$. Sei T^*F das duale Bündel. Sei $T^H M$ eine horizontale Distribution für $\pi : M \rightarrow B$, also

$$TM = T^H M \oplus TF.$$

Sei \mathcal{V} die Projektion von TM auf TF . Es gilt

$$T^H M \simeq \pi^* TB.$$

Als Bündel von \mathbb{Z} -graduierten Algebren über M ist also

$$\Lambda(T^* M) \simeq \pi^*(\Lambda(T^* B)) \otimes \Lambda(T^* F). \quad (28)$$

Sei W das glatte unendlich-dimensionale \mathbb{Z} -graduierte Vektorbündel über B , dessen Faser über $b \in B$ gerade $C^\infty(F_b, \Lambda(T^* F) \upharpoonright F_b)$ ist.

Das bedeutet

$$C^\infty(B, W) \simeq C^\infty(M, \Lambda(T^* F))$$

Sei $\Omega^V(M)$ der Unterraum von $\Omega(M)$, der durch innere Multiplikation mit horizontalen Vektoren annulliert wird. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\Omega^V(M) \simeq C^\infty(B, W), \omega \mapsto (b \mapsto \omega \upharpoonright F_b)$$

Wegen (28) also

$$\Omega(M) \simeq \Omega(B) \hat{\otimes} \Omega^V(M)$$

Damit haben wir einen Isomorphismus von \mathbb{Z} -graduierten Vektorräumen

$$\Omega^\bullet(M) \simeq \Omega^\bullet(B, W) := C^\infty(B, \Lambda^\bullet(T^* B) \otimes W)$$

Sei $d = d^M$ äußere Ableitung auf $\Omega(M)$. Es gilt $d^2 = 0$. Für $f \in C^\infty(B)$ und $\omega \in \Omega(M)$ gilt

$$d^M((\pi^* f) \cdot \omega) = (\pi^* d^B f) \wedge \omega + (\pi^* f) \cdot d^M \omega$$

Damit ist d^M ein *flacher Superzusammenhang vom Totalgrad 1* in der Terminologie von [Bi-Lo]. Wir betrachten die Zerlegung von d^M in horizontale und vertikale Anteile.

Definition 3.1. Sei $d^{0,1} = d^F \in C^\infty(B, \text{Hom}(W^\bullet, W^{\bullet+1}))$ das Differential entlang der Fasern.

Sei X ein glattes Vektorfeld auf B mit horizontalem Lift $X^H \in C^\infty(M, T^H M)$, also $\pi_* X^H = X$. Weil der Fluss von X^H ein Diffeomorphismus der Fasern ist,

operiert die Lieableitung Lie_{X^H} auf $C^\infty(M, \Lambda(T^*F))$. Für $f \in C^\infty(B)$ und $a \in C^\infty(M, \Lambda(T^*F))$ gilt

$$\text{Lie}_f X^H a = (\pi^* f) \text{Lie}_{X^H} a \quad (29a)$$

$$\text{Lie}_{X^H}((\pi^* f)a) = \pi^*(Xf) \cdot a + (\pi^* f) \cdot \text{Lie}_{X^H} a \quad (29b)$$

Für $s \in C^\infty(B, W)$ und ein Vektorfeld X auf B , setze

$$\nabla_X^W s = \text{Lie}_{X^H} s.$$

Wegen (29a) und (29b) ist ∇^W kovariante Ableitung auf W , die die \mathbb{Z} -Graduierung erhält. Diese wird in eindeutiger Weise zu einer kovarianten Ableitung auf $\Omega(B, W)$ fortgesetzt

$$\nabla^W : \Omega^\bullet(B, W) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(B, W),$$

so dass die Leibnizregel

$$\nabla^W(\alpha \wedge \theta) = d^B \alpha \wedge \theta + (-1)^r \alpha \wedge \nabla^W \theta, \quad \alpha \in \Omega^r(B), \theta \in \Omega^\bullet(B, W) \quad (30)$$

erfüllt ist.

Definition 3.2.

$$d^{1,0} := \nabla^W : \Omega^\bullet(B, W) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(B, W)$$

Schließlich sei für Vektorfelder X, Y auf B definiert

$$T(X, Y) := -\mathcal{V}[X^H, Y^H] \in C^\infty(M, TF).$$

Dieses T ist eine TF -wertige horizontale 2-Form auf M und wird die *Krümmung des Faserbündels* genannt.

Definition 3.3. Sei $d^{2,-1} = i_T \in \Omega^2(B, \text{Hom}(W^\bullet, W^{\bullet-1}))$ die 2-Form auf B , die für ein Paar (X, Y) aus Vektorfeldern auf B durch die innere Multiplikation mit $T(X, Y)$ gegeben ist:

$$i_T(X, Y)(\omega) = T(X, Y) \lrcorner \omega.$$

Damit haben wir $d^{i,j}$ für $(i, j) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$ definiert. In [Bi-Lo, Proposition 3.4] bzw. [BGV, Proposition 10.1] wird gezeigt:

$$d^M = d^{0,1} + d^{1,0} + d^{2,-1}. \quad (31)$$

Schreibe schließlich ($n = \dim M$)

$$\Omega^{a,b} := \Omega^a(B) \otimes (\Omega^V)^b(F) \simeq \Omega^a(B, W^{(b)}), \quad \Omega^{*,k} := \bigoplus_{j=0}^{n-k} \Omega^{j,k},$$

so dass

$$d^{i,j} : \Omega^{a,b} \rightarrow \Omega^{a+i,b+j}.$$

Sei $*$ der Faserweise Hodge-Stern-Operator bezüglich g^F . Dieser ist ein Operator auf

$$C^\infty(M, \Lambda(T^*F)) \simeq C^\infty(B, W).$$

Auf diese Weise erhält W eine Hermitesche Metrik h^W , so dass für $s, s' \in C^\infty(B, W)$ und $b \in B$

$$(\langle s, s' \rangle_{h^W})(b) = \int_{F_b} s(b) \wedge *s'(b) = \int_{F_b} \langle s(b), s'(b) \rangle_{F_b} \text{vol}_{F_b}$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F_b}$ das durch g^F induzierte Skalarprodukt auf $\Omega^*(F_b)$. Das hermitesche Faserprodukt h^W kann auf $\Omega^*(B, W)$ erweitert werden.

Definition 3.4. Sei $\delta^{i,j}$ faserweise formal adjungiert zu $d^{i,j}$, sowie $\delta^F := \delta^{0,1}$.

Aufspalten von $(d^M)^2 = 0$ in horizontalen und vertikalen Grad ergibt wegen (31)

$$\left. \begin{aligned} (d^2)^{0,2} &= (d^{0,1})^2 = 0 \\ (d^2)^{1,1} &= d^{1,0}d^{0,1} + d^{0,1}d^{1,0} = 0 \\ (d^2)^{2,0} &= d^{2,-1}d^{0,1} + (d^{1,0})^2 + d^{0,1}d^{2,-1} = 0 \\ (d^2)^{3,-1} &= d^{2,-1}d^{1,0} + d^{1,0}d^{2,-1} = 0 \\ (d^2)^{4,-2} &= (d^{2,-1})^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

und entsprechende Formeln für $\delta^{i,j}$.

3.2 Faserharmonische Formen

Definition 3.5. Eine Form $\omega \in \Omega^*(B, W)$ heiße *faserweise harmonisch*, oder einfach *faserharmonisch*, wenn $d^F\omega = 0$ und $\delta^F\omega = 0$. Der Raum der faserharmonischen Formen werde mit $\Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F))$ bezeichnet.

Sei $\Delta^F := d^F\delta^F + \delta^F d^F$. Weil die Fasern von $M \rightarrow B$ geschlossene Untermannigfaltigkeiten sind, ist $\omega \in \Omega^*(B, W)$ genau dann faserharmonisch, wenn $\Delta^F\omega = 0$.

Das Theorem von Hodge besagt $H^k(F) \cong \mathcal{H}^k(F_b)$, also ist $\dim \mathcal{H}^*(F_b)$ eine topologische Invariante von F . Damit ist $\mathcal{H}^*(F) \rightarrow B$ ein endlichdimensionales Vektorraumbündel über B .

Bezüglich h^W gibt es eine direkte orthogonale Summe

$$\Omega^*(B, W) = \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)) \oplus \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp) \quad (33)$$

Mit Π_0 bzw. Π_\perp werden die Projektionen auf $\Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F))$ bzw. $\Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp)$ bezeichnet.

Im Allgemeinen lässt $d^{1,0}$ diese Zerlegung nicht invariant, also $\Pi_\perp d^{1,0} \Pi_0 \neq 0$. Ein hinreichendes Kriterium liefert der folgende

Satz 3.6. *Ist die mittlere Krümmung H der Fasern projizierbar, so lassen $d^{1,0}$ und $\delta^{1,0}$ die Zerlegung (33) invariant.*

Beweis. Seien zunächst $s_1, s_2 \in C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F))$. Wir wissen aus (32), dass $d^{1,0}d^F + d^F d^{1,0} = 0$. Es genügt also

$$\omega \in C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F)) =: \delta^F \nabla_X^W \omega = 0$$

für ein basic Vektorfeld $X = \pi^* \bar{X}$ zu zeigen, denn $d^{1,0}$ wird aus ∇_X^W konstruiert, so dass die Leibnizregel gilt. Die folgende Rechnung ist ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.7 auf Seite 18

$$\begin{aligned} \bar{X}(h_w(s_1, s_2)) &= \text{Lie}_{\bar{X}} \left(\int_{F_b} \langle s_1, s_2 \rangle_{F_b} \text{vol}_{F_b} \right) \\ &= \int_{F_b} \text{Lie}_X(\langle s_1, s_2 \rangle_{F_b}) \text{vol}_{F_b} + \int_{F_b} \langle s_1, s_2 \rangle_{F_b} \text{Lie}_X \text{vol}_{F_b} \end{aligned}$$

Bekanntlich⁵ gilt

$$\text{Lie}_X \text{vol}_{F_b} \upharpoonright F_b = -g^B(H, X) \text{vol}_{F_b}$$

mit der mittleren Krümmung H der Fasern. Ist jetzt H projizierbar mit $\pi_* H = \bar{H}$, so folgt

$$\begin{aligned} \bar{X}(h^W(s_1, s_2)) &= \int_{F_b} \text{Lie}_X(\langle s_1, s_2 \rangle_{F_b}) \text{vol}_{F_b} - g^B(\bar{H}, \bar{X}) \int_{F_b} \langle s_1, s_2 \rangle_{F_b} \text{vol}_{F_b} \\ &= h^W(\nabla_X^W s_1, s_2) + h^W(s_1, \nabla_X^W s_2) - g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(s_1, s_2) \end{aligned} \quad (34)$$

Dabei wurde verwendet, dass ∇^W verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{F_b}$ ist.

Sei jetzt s_2 faserharmonisch, also $\delta^F s_2 = 0 = d^F s_2$.

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{X}(h^W(s_1, \delta^F s_2)) = \bar{X}(h^W(d^F s_1, s_2)) \\ &= h^W(\nabla_X^W d^F s_1, s_2) + h^W(d^F s_1, \nabla_X^W s_2) - g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(s_1, s_2) \\ &= -h^W(d^F \nabla_X^W s_1, s_2) + h^W(s_1, \delta^F \nabla_X^W s_2) - g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(s_1, s_2) \\ &= -h^W(\nabla_X^W s_1, \delta^F s_2) + h^W(s_1, \delta^F \nabla_X^W s_2) - g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(s_1, s_2) \end{aligned}$$

also

$$h^W(s_1, \delta^F \nabla_X^W s_2) = g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(s_1, s_2)$$

Insbesondere für $s_1 = \delta^F \nabla_X^W s_2$:

$$h^W(s_1, s_1) = g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(\delta^F \nabla_X^W s_2, s_2) = g^B(\bar{H}, \bar{X}) h^W(\nabla_X^W s_2, d^F s_2) = 0$$

und so $s_1 = 0$. Damit gilt $\nabla^W C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F)) \subset C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F))$.

Sei jetzt $s_1 \in C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp)$, $s_2 \in C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F))$. Aus (34)

$$\bar{X}(h^W(s_1, s_2)) = 0 = h^W(\nabla_X^W s_1, s_2) + h^W(s_1, \nabla_X^W s_2) = h^W(\nabla_X^W s_1, s_2)$$

also $\nabla^W C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp) \subset C^\infty(B, \mathcal{H}^*(F)^\perp)$

Die Behauptung für $\Omega^*(B, W)$ folgt schließlich aus der Leibnizregel (30). Die Aussage über $\delta^{1,0}$ folgt aus $\Pi_\perp d^{1,0} \Pi_0 = 0 \Leftrightarrow \Pi_0 \delta^{1,0} \Pi_\perp = 0$. \square

⁵Lemma 10.4 in [BGV] oder Theorem 6.6 in [La]

Bemerkung 3.7. Für Funktionen besagt Lemma 2.7 auf Seite 18

$$(d^{1,0}\Pi_0 f)(X) = X(\Pi_0 f) = \Pi_0(X(f) - g(H, X)\Pi_\perp f),$$

also $d^{1,0}\Pi_0 f \in \Pi_0 C^\infty(M) = C^\infty(B, \mathbb{R})$. Aus dieser Formel folgt auch unmittelbar, dass

$$\Pi_0 d^{1,0}\Pi_\perp = 0 \iff \forall f : \Pi_0(g(H, X)\Pi_\perp f) = 0,$$

und ein hinreichendes Kriterium dafür ist $H = \pi^* \bar{H}$. \diamond

3.3 Kohomologie

Mit $\Omega_c(X)$ werden Formen mit kompaktem Träger bezeichnet. Wie üblich sei $L^2\Omega^p(X)$ der Abschluss von $\Omega_c^p(X)$ in der von dem Skalarprodukt

$$(\phi, \psi)_{L^2\Omega^p(X)} := \int_X \phi \wedge * \psi$$

induzierten Norm.

Die meisten Aussagen in dieser Arbeit beziehen sich auf die de Rham-Kohomologie

$$H^p(X) = \frac{\{\omega \in \Omega^p(X) \mid d\omega = 0\}}{d\Omega^{p-1}(X)}$$

sowie auf die de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger

$$H_c^p(X) = \frac{\{\omega \in \Omega_c^p(X) \mid d\omega = 0\}}{d\Omega_c^{p-1}(X)}.$$

Der Definitionsbereich von $d_p : L^2\Omega^p(X) \rightarrow L^2\Omega^{p+1}(X)$ ist

$$\text{dom } d_p = \{\phi \in \Omega^p(X) \cap L^2\Omega^p(X) \mid d\phi \in L^2\Omega^{p+1}(X)\},$$

und entsprechend für das Kodifferential δ_p . Weil $\Omega_c^p(X)$ dicht in $L^2\Omega^p(X)$ liegt, hat d einen wohldefinierten starken Abschluss \bar{d} . Wir definieren die p -te L^2 -Kohomologiegruppe

$$H_{(2)}^p = \frac{\ker \bar{d}_p}{\text{im } \bar{d}_{p-1}}$$

sowie die L^2 -harmonischen p -Formen

$$\mathcal{H}_{(2)}^p(X) = \{\omega \in L^2\Omega^p(X) \mid \Delta\omega = 0\}.$$

Nach dem Regularitätssatz für elliptische Operatoren sind Formen in $\mathcal{H}_{(2)}^p(X)$ glatt.

Für $\omega \in \mathcal{H}_{(2)}^p(X)$ gilt $(\Delta\omega, \omega) = \|d\omega\|^2 + \|\delta\omega\|^2$, also

$$\Delta\omega = 0 \iff (d\omega = 0 \wedge \delta\omega = 0).$$

Insbesondere ist $\mathcal{H}_{(2)}^p(X) \subset \ker \bar{d}_p$, und dies induziert eine Abbildung

$$\mathcal{H}_{(2)}^p(X) \rightarrow H_{(2)}^p, \quad \omega \mapsto [\omega].$$

Im Allgemeinen ist dies kein Isomorphismus. Die L^2 -harmonischen Formen sind jedoch isomorph zur *reduzierten* L^2 -Kohomologie

$$H_{(2),\text{red}}^p = \frac{\ker \bar{d}_p}{\text{im } \bar{d}_{p-1}}.$$

Schließlich sei noch das folgende Theorem von Kodaira erwähnt:

$$L^2\Omega^p(X) = \mathcal{H}_{(2)}^p(X) \oplus \overline{\delta\Omega_c^{p+1}(X)} \oplus \overline{d\Omega_c^{p-1}(X)}$$

3.4 Flacher Zusammenhang des Kohomologiebündels der Fasern

Wegen $(d^F)^2 = 0$ gibt es einen Kokettenkomplex von Vektorbündeln

$$(W_b, d^{F_b}) : 0 \rightarrow W_b^{(0)} \xrightarrow{d^{F_b}} W_b^{(1)} \xrightarrow{d^{F_b}} \dots \xrightarrow{d^{F_b}} W_b^{(f)} \rightarrow 0$$

mit $W_b^{(j)} = C^\infty(F_b, \Lambda^j(T^*F) \upharpoonright F_b)$.

Sei $H^*(F) = \bigoplus_{i=0}^f H^i(F)$ das \mathbb{Z} -graduierte Vektorbündel über B , dessen Faser über $b \in B$ die Kohomologie $H^*(F_b)$ des Komplexes (W_b, d^{F_b}) ist. Es gibt einen natürlichen Zusammenhang auf $H(F)$ wie folgt:

Sei $\psi : \ker d^F \rightarrow H^*(F), \omega \mapsto [\omega]$ die Quotientenabbildung. Für ein j mit $0 \leq j \leq f$ sei s ein glatter Schnitt in $H^j(F)$. Dann gibt es einen glatten Schnitt e in $W^{(j)} \cap \ker d^F$, so dass $\psi(e) = s$. Für ein Vektorfeld X auf B gilt $d^F(\nabla_X^W e) = -\nabla_X^W(d^F e) = 0$, also $\nabla_X^W e \in \ker d^F$. Der Zusammenhang auf $H(F)$ ist dann definiert durch

$$\nabla_X^{H(F)} s := \psi(\nabla_X^W e)$$

Dies ist wohldefiniert, weil für $e = d^F e'$ auch $\nabla_X^W(d^F e') = -d^F(\nabla_X^W e') \in \text{im } d^F$. Damit ist $\nabla_X^{H(F)}$ ein Zusammenhang auf $H(F)$, der die \mathbb{Z} -Graduierung erhält.

Sei $V = \delta^F - d^F \in C^\infty(B, \text{End}(W))$. Das Hodge-Theorem liefert einen Isomorphismus $H(F_b) \simeq \ker(V_b)$ und dieser induziert einen Isomorphismus

$$H(F) \simeq \ker(V) \tag{35}$$

von glatten \mathbb{Z} -graduierten Vektorbündeln. Als Unterbündel von W besitzt $\ker(V)$ eine Hermitesche Metrik, die aus h^W durch Einschränkung vererbt wird. Sei $\Pi_0 : W \rightarrow \ker(V)$ die Orthogonalprojektion. $\Pi_0 \nabla^W$ ist ein Zusammenhang auf $\ker(V)$, der mittels (35) als Zusammenhang auf $H(F)$ aufgefasst werden kann. Der folgende Satz ist Proposition 15 in [HHM], siehe auch S. 332 in [Bi-Lo].

Satz 3.8. $\nabla^{H(F)}$ ist ein flacher Zusammenhang und es gilt $\nabla^{H(F)} = \Pi_0 \nabla^W$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu Proposition 2.6 in [Bi-Lo]. Zu einem Schnitt $s \in H(F)$ sei e glatter Schnitt in $\ker d^F$ mit $\psi(e) = s$. Für ein Vektorfeld X auf B ist $\nabla_X^W e \in \ker d^F$. Nach dem Hodge-Theorem ist $\Pi_0 \nabla_X^W e - \nabla_X^W e \in \text{im } d^F$, also

$$\nabla_X^{H(F)} s = \psi(\nabla_X^W e) = \psi(\Pi_0 \nabla_X^W e)$$

Dass $\nabla^{H(F)}$ flach ist, folgt aus

$$(\nabla^{H(F)})^2 s = \psi((\nabla_X^W)^2 e) = -\psi((d^F d^{2,-1} + d^{2,-1} d^F)e) = 0$$

□

3.5 Laplaceoperator auf $\Omega^*(Z)$

Sei Δ_Z der Laplaceoperator auf Z , wobei wir Δ_Z als linearen Operator auf $L^2\Omega^p(Z)$ mit $\text{dom } \Delta_Z = \Omega_c^p(Z)$ betrachten. Sei $\bar{\Delta}_Z$ die Friedrichserweiterung von Δ_Z . Genauer definieren wir zuerst $q(\phi, \psi) := (\phi, \Delta_Z \psi)_{L^2\Omega^p(Z)}$ mit $\phi, \psi \in \text{dom } \Delta_Z$. Dies ist eine quadratische Form mit Definitionsbereich $Q(q) = \Omega_c^p(Z)$. Sei \tilde{q} der Abschluss dieser Form. Die Friedrichserweiterung $\bar{\Delta}_Z$ von Δ_Z ist dann derjenige auf $L^2\Omega^p(Z)$ selbstadjungierte Operator, der durch $(\phi, \bar{\Delta}_Z \psi) = \tilde{q}(\phi, \psi)$ definiert wird. Nach Definition ist der Definitionsbereich der quadratischen Form von $\bar{\Delta}_Z$ gerade der Abschluss von $\text{dom } \Delta_Z = \Omega_c^p(Z)$ in der Norm

$$\|\phi\|_1^2 = \|\phi\|^2 + q(\phi, \phi),$$

also der Sobolev-Raum $H_0^1\Omega^p(Z)$. Der Definitionsbereich von $\bar{\Delta}_Z$ ist $H^2\Omega^p(X) \cap H_0^1\Omega^p(Z)$. Für $\varphi \in \text{dom } \bar{\Delta}_Z \cap \Omega^p(\bar{Z})$ gilt

$$i^*\varphi = 0, \quad i^*(\ast\varphi) = 0 \quad (36)$$

mit der Inklusion $i : M \hookrightarrow Z$.

Ab jetzt schreiben wir Δ_Z für $\bar{\Delta}_Z$.

Für alles Weitere verwenden wir folgende **Bezeichnungen**:

- $\Omega^{a,k} := \Omega^a(B, \mathcal{H}^k(F))$
- Der Fasergrad-Operator κ ist der lineare Operator $\kappa : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$, der durch $\kappa\phi = k\phi$ für $\phi \in \Omega^{*,k}$ definiert ist.
- Durch $\varrho_u(\omega) = e^{\kappa u}\omega$ wird eine Isometrie

$$\varrho_u : (\Omega^*, g_u^M) \rightarrow (\Omega^*, g^M)$$

definiert. Seien α, β Elemente aus $\Omega^{*,k}$, die parametrisch von u abhängen. Setze ϱ_u fort auf $\Omega^*(Z)$ durch $\varrho_u^{-1}(du \wedge \beta) := du \wedge \varrho_u^{-1}\beta$.

- Außerdem ist es zweckmäßig, die Isometrie

$$\tilde{\varrho}_u : L^2\Omega^*(Z, g_Z) \rightarrow L^2\Omega^*(Z, du^2 + g)$$

zu betrachten, die für $\alpha, \beta \in \Omega^{*,k}$ gegeben ist durch

$$\tilde{\varrho}_u(\alpha + du \wedge \beta) := e^{(k-f/2)u}(\alpha + du \wedge \beta)$$

- Schließlich seien

$$\begin{aligned} a_k &= f/2 - k, & d_k &= |a_k| \\ \underline{a} &= f/2 \cdot \text{id} - \kappa, & \underline{d} &= |\underline{a}|. \end{aligned}$$

Folgender Satz beschreibt die lokale Form von Δ_Z .

Satz 3.9. Sei $\omega \in \Omega_c^{*,k}(Z)$ und $\pi_2 : Z = \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow M$ Projektion. Wir schreiben $\omega = (\alpha, \beta) := \alpha + du \wedge \beta$, wobei $\alpha, \beta \in \pi_2^* \Omega^{*,k}$ parametrisch von $u \in \mathbb{R}$ abhängen.

Außerdem seien

$$\begin{aligned} d_u^M &= e^{-u} d^{2,-1} + d^{1,0} + e^u d^F \\ \tilde{T}_u &= -\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left(\frac{f}{2} - k\right)^2 + (d_u^M + (d_u^M)^*)^2 \\ Q_u &= e^{-u} (d^{2,-1} - \delta^{2,-1}) - e^u (d^F - \delta^F) \end{aligned}$$

Bezüglich obiger Zerlegung ist

$$\tilde{\varrho}_u (d + \delta)^2 \tilde{\varrho}_u^{-1} \omega = \begin{pmatrix} \tilde{T}_u & -Q_u \\ Q_u & \tilde{T}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Beweis. Sei $*^M$ der Hodge-Stern-Operator auf $\Omega^*(M)$ bezüglich g^M . Dann gilt

$$\begin{aligned} *^Z (du \wedge \alpha) &= e^{(2k-f)u} *^M \alpha \\ *^Z \alpha &= (-1)^{\deg \alpha} e^{(2k-f)u} du \wedge *^M \alpha \end{aligned}$$

Es folgt

$$*^Z (\varrho_u^{-1} \alpha) = (-1)^{\deg \alpha} \varrho_u^{-1} (du \wedge *^M \alpha) \quad (38a)$$

$$*^Z (\varrho_u^{-1} du \wedge \beta) = \varrho_u^{-1} *^M \beta \quad (38b)$$

Lokal können α und $d\alpha$ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{I,K,|K|=k} f_{I,K}(u, y, b) dy_K \wedge db_I \\ d\alpha &= \sum_{I,K,|K|=k} \partial_u f_{I,K}(u, y, b) du \wedge dy_K \wedge db_I + d^M \alpha = du \wedge \partial_u \alpha + d^M \alpha \end{aligned}$$

Seien

$$\begin{aligned} d_u^M &:= \varrho_u d^M \varrho_u^{-1} = e^{-u} d^{2,-1} + d^{1,0} + e^u d^{0,1} \\ \delta_u^M &:= e^{-u} \delta^{2,-1} + \delta^{1,0} + e^u \delta^{0,1} \end{aligned}$$

d.h. δ_u^M ist das zu d_u^M bezüglich g^M duale Differential.

$$\begin{aligned} d^Z (\varrho_u^{-1} \alpha) &= \varrho_u^{-1} (d_u^M \alpha + du \wedge (\partial_u \alpha - k\alpha)) \\ d^Z (\varrho_u^{-1} du \wedge \beta) &= -\varrho_u^{-1} (du \wedge d_u^M \beta) \\ \delta^Z (\varrho_u^{-1} \alpha) &= \varrho_u^{-1} \delta_u^M \alpha \\ \delta^Z (\varrho_u^{-1} du \wedge \beta) &= -\varrho_u^{-1} (du \wedge \delta_u^M \beta) - \varrho_u^{-1} (\partial_u \beta - (f - k)\beta) \end{aligned}$$

Definieren wir schließlich $D_u^M := d_u^M + \delta_u^M$, so ergibt obige Rechnung bezüglich der Zerlegung $(\alpha, \beta) = \alpha + du \wedge \beta$, wobei $\alpha, \beta \in \Omega^{*,k}$

$$\varrho_u(d^Z + \delta^Z)\varrho_u^{-1} = \begin{pmatrix} D_u^M & -\partial_u + (f - k) \\ \partial_u - k & -D_u^M \end{pmatrix}$$

Dabei ist δ^Z dual zu d^Z bezüglich der zu g^Z assoziierten Norm auf $\Omega^*(Z)$. Es ist zu beachten, dass D_u^M den Fasergrad ändert.

$$D_u^M = (e^{-u}d^{2,-1} + e^u\delta^{0,1}) + (d^{1,0} + \delta^{1,0}) + (e^{-u}\delta^{2,-1} + e^ud^{0,1})$$

Die Anteile, die den Fasergrad verringern bzw. erhöhen sind also

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} e^{-u}d^{2,-1} + e^u\delta^{0,1} & 0 \\ 0 & -e^{-u}d^{2,-1} - e^u\delta^{0,1} \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} e^{-u}\delta^{2,-1} + e^ud^{0,1} & 0 \\ 0 & -e^{-u}\delta^{2,-1} - e^ud^{0,1} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \varrho_u(d^Z + \delta^Z)^2\varrho_u^{-1} &= \begin{pmatrix} D_u^M & -\partial_u + f \\ \partial_u & -D_u^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_u^M & -\partial_u + (f - k) \\ \partial_u - k & -D_u^M \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^{1,0} + \delta^{1,0} & -\partial_u + f - k \\ \partial_u - k & -d^{1,0} - \delta^{1,0} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & k-1 \\ k-1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{B} - \begin{pmatrix} 0 & k+1 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{C} \\ &= \begin{pmatrix} D_u^M & -\partial_u + f - k \\ \partial_u - k & -D_u^M \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$T_u = -\partial_u^2 + f\partial_u - k(f - k) + (D_u^M)^2,$$

$$Q_u = e^{-u}d^{2,-1} + e^u\delta^{0,1} - e^{-u}\delta^{2,-1} - e^ud^{0,1}$$

folgt zunächst

$$\varrho_u(d + \delta)^2\varrho_u^{-1} = \begin{pmatrix} T_u & -Q_u \\ Q_u & T_u \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\tilde{\varrho}_u(d + \delta)^2\tilde{\varrho}_u^{-1} = e^{fu/2}\varrho_u(d + \delta)^2\varrho_u^{-1}e^{-fu/2} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_u & -Q_u \\ Q_u & \tilde{T}_u \end{pmatrix}$$

mit

$$\tilde{T}_u := e^{fu/2}T_ue^{-fu/2} = -\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + (D_u^M)^2.$$

□

3.6 Punktspektrum

Satz 3.10. *Die Einschränkung von Δ_Z auf das orthogonale Komplement der faserharmonischen Formen*

$$\Delta_Z \upharpoonright (\Pi_0 L^2 \Omega^*(Z, g_0) \Pi_0)^\perp$$

hat reines Punktspektrum.

Beweis. Der Beweis ist ganz ähnlich wie der von Satz 2.14 im Funktionenfall. Hier sollen deshalb nur die Unterschiede erläutert werden. Wie dort betrachten wir eine Zerlegung

$$\tilde{\varrho} \Delta_Z \tilde{\varrho}^{-1} = (-\partial_u^2 + (f/2 - k)^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + V_u, \quad V_u := \begin{pmatrix} (D_u^M)^2 & -Q_u \\ Q_u & (D_u^M)^2 \end{pmatrix}$$

und wenden das Minimax-Prinzip an:

Für $\omega \in \text{dom } \Delta_Z$ ist

$$\frac{(\Delta_Z \omega, \omega)_{L^2 \Omega^p(Z, g_Z)}}{\|\omega\|_{L^2 \Omega^p(Z, g_Z)}^2} = \frac{(\tilde{\varrho} \Delta_Z \tilde{\varrho}^{-1}(\tilde{\varrho} \omega), \tilde{\varrho} \omega)_{L^2 \Omega^p(Z)}}{\|\tilde{\varrho} \omega\|_{L^2 \Omega^p(Z)}^2}$$

Im Minimax-Prinzip für Δ_Z werden also die Terme

$$\lambda_i = \sup_{v_1, \dots, v_{i-1} \in H_0^1} \inf_{\substack{v_i \in H_0^1 \\ v_i \perp v_k \forall k < i}} \frac{\|\tilde{\varrho} d^Z \tilde{\varrho}^{-1} v_i\|^2 + \|\tilde{\varrho} \delta^Z \varrho^{-1} v_i\|^2}{\|v_i\|^2}$$

betrachtet. Dabei ist zu beachten, dass $H_0^1 \Omega^p(Z)$ unabhängig von der Metrik auf Z ist.

Sei $\omega = \alpha + du \wedge \beta$, $\alpha, \beta \in \Omega_c^{*,k}(Z)$ mit $\text{supp } \omega \subset [a, \infty) \times M$ und $\|\alpha\|_{H^1} = 1$, $\|\beta\|_{H^1} = 1$; α, β parametrisch abhängig von $u \in \mathbb{R}^+$. Im Folgenden sind alle Skalarprodukte und Normen diejenigen in $L^2 \Omega^p(Z, du^2 + g_0)$.

$$\begin{aligned} (V_u \omega, \omega) &= \left(\begin{pmatrix} (D_u^M)^2 \alpha - Q_u \beta \\ Q_u \alpha + (D_u^M)^2 \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) \\ &= ((D_u^M)^2 \alpha, \alpha) + ((D_u^M)^2 \beta, \beta) - (Q_u \beta, \alpha) + (Q_u \alpha, \beta) \\ &= \|D_u^M \alpha\|^2 + \|D_u^M \beta\|^2 + 2(Q_u \alpha, \beta) \end{aligned}$$

$$|(V_u \omega, \omega)| \geq \|D_u^M \alpha\|^2 + \|D_u^M \beta\|^2 - 2\|Q_u \alpha\| \|\beta\|$$

Weil $\|\alpha\|_{H^1} = 1$, sind alle $\|d^{i,j} \alpha\|$, $\|\delta^{i,j} \alpha\|$ durch eine von a unabhängige Konstante beschränkt, und entsprechendes gilt für β :

$$|(V_u \omega, \omega)| \geq \|D_u^M \alpha\|^2 + \|D_u^M \beta\|^2 - C_0(\|e^u d^F \alpha\| + \|e^u \delta^F \alpha\|) + C_1. \quad (39)$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\|D_u^M \alpha\|^2 \geq \|e^u d^F \alpha\|^2 + \|e^u \delta^F \alpha\|^2 - C_2 \|e^u d^F \alpha\| - C_3 \|e^u \delta^F \alpha\| + C_4, \quad (40)$$

und eine analoge Abschätzung gilt für $\|D_u^M \beta\|^2$.

Nun ist aber $\|e^u d^F \alpha\| \geq e^a \|d^F \alpha\|$. Deshalb gilt für jede reelle Konstante c

$$\|d^F \alpha\| \neq 0 \quad : \quad \lim_{a \rightarrow \infty} (\|e^u d^F \alpha\|^2 - c \|e^u d^F \alpha\|) = +\infty,$$

und so folgt aus (39) und (40), dass

$$|(V_u \omega, \omega)| \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad a \rightarrow \infty,$$

falls $\|d^F \omega\| \neq 0$ oder $\|\delta^F \omega\| \neq 0$.

Wie im Beweis von Satz 2.14 folgt dann die Behauptung. \square

Definition 3.11. Die *Spitzenformen auf Z* sind Elemente aus

$$L_{\text{cusp}}^2 \Omega^p(Z) := \{\omega \in L^2 \Omega^p(Z) \mid \exists \lambda \geq 0 : \Delta_Z \omega = \lambda \omega, \Pi_0(\omega) = 0\}$$

Dabei ist $\Delta_Z \omega$ zunächst im Distributionensinn zu verstehen, aber nach dem Regularitätssatz für elliptische Operatoren sind Spitzenformen sogar glatt.

3.7 Zwei Bedingungen

Wir nehmen jetzt an, dass die horizontale Distribution \mathcal{H} von $\pi : M \rightarrow B$ integrabel ist. Wegen Lemma 1.3 auf Seite 12 ist dies äquivalent dazu, dass $d^{2,-1} = 0$; vgl. auch Definition 3.3.

Dann ist auch $(d^{1,0})^2 = 0$ aufgrund (32) und $\Delta_{1,0} := d^{1,0} \delta^{1,0} + \delta^{1,0} d^{1,0} = (d^{1,0} + \delta^{1,0})^2$.

Weil außerdem nach der Zerlegungsformel von Hodge $\Pi_0 d^F = \Pi_0 \delta^F = d^F \Pi_0 = \delta^F \Pi_0 = 0$, folgt

$$\begin{aligned} (D_u^M)^2 &= \Delta_{1,0} + e^u (\delta^F d^{1,0} + d^F \delta^{1,0} + d^{1,0} \delta^F + \delta^{1,0} d^F) + e^{2u} \Delta_F \\ \Pi_0 (D_u^M)^2 \Pi_0 &= \Pi_0 \Delta_{1,0} \Pi_0 \end{aligned}$$

und so

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_u (d^Z + \delta^Z)^2 \tilde{\varrho}_u^{-1} &= \begin{pmatrix} \tilde{T}_u & -Q_u \\ Q_u & \tilde{T}_u \end{pmatrix} \\ \tilde{\varrho}_u \Pi_0 (d^Z + \delta^Z)^2 \Pi_0 \tilde{\varrho}_u^{-1} &= \begin{pmatrix} \tilde{T}_u & 0 \\ 0 & \tilde{T}_u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{T}_u &= -\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + e^{2u} \Delta_F + \Delta_{1,0} \\ &\quad + e^u (\delta^F d^{1,0} + d^F \delta^{1,0} + d^{1,0} \delta^F + \delta^{1,0} d^F) \\ Q_u &= e^u (\delta^F - d^F) \\ \tilde{T}_u &= -\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + \Pi_0 \Delta_{1,0} \Pi_0 \end{aligned}$$

Zusätzlich sollen jetzt faserharmonische Formen invariant unter Anwenden des horizontalen Differentials sein, also

$$\Pi_{\perp} d^{1,0} \Pi_0 = 0, \quad \Pi_{\perp} \delta^{1,0} \Pi_0 = 0.$$

Dies impliziert

$$d^Z \Pi_0 = (d^R + d^{2,-1} + d^{1,0} + d^F) \Pi_0 = (d^R + d^{1,0}) \Pi_0 = \Pi_0 (d^R + d^{1,0}) \Pi_0 = \Pi_0 d^Z,$$

weshalb auch Δ_Z die Zerlegung in faserharmonischen Formen und deren orthogonales Komplement invariant lässt. In diesem Fall hat $\Pi_0 \Delta_Z \Pi_0$ die besonders einfache Form

$$\tilde{\partial}_u \Pi_0 (d^Z + \delta^Z)^2 \Pi_0 \tilde{\partial}_u^{-1} = -\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + \Delta_{1,0}.$$

Für die verbleibenden Kapitel machen wir deshalb die

Annahmen:

- (A) Die horizontale Distribution ist integrabel, also $d^{2,-1} = 0$.
- (B) $\Pi_\perp d^{1,0} \Pi_0 = 0$, $\Pi_\perp \delta^{1,0} \Pi_0 = 0$

Ein hinreichendes Kriterium für Eigenschaft (B) liefert Satz 3.6. Insbesondere ist (B) bei minimalen Fasern oder einem warped product erfüllt.

Lemma 3.12. *Unter den gegebenen Bedingungen ist*

$$\Delta_{1,0} = d^{1,0} \delta^{1,0} + \delta^{1,0} d^{1,0} : \Omega^*(B, \mathcal{H}^k(F)) \rightarrow \Omega^*(B, \mathcal{H}^k(F))$$

nicht-negativer elliptischer symmetrischer Operator.

Beweis. Die Nichtnegativität folgt aus Satz 3.8: $\Delta_{1,0} = (d^{1,0} + \delta^{1,0})^2$. Aus den lokalen Formeln für ∇^W und $(\nabla^W)^*$ in [Bi-Lo] (Proposition 3.5 und 3.7 dort; siehe auch [GLP]) folgt, dass $\Delta_{1,0}$ verallgemeinerter Laplaceoperator, insbesondere elliptisch, ist. \square

Unter der Annahme, dass die horizontale Distribution integrabel ist, zeigt Lemma 10.4 in [BGV]

$$d^{1,0} \text{vol}_{F_b} = -H^\vee \wedge \text{vol}_{F_b}, \quad H^\vee \text{ dual zu } H \text{ bezüglich } g^M, \quad (41)$$

und wenn außerdem die mittlere Krümmung H der Fasern projizierbar ist, $H = \pi^* \bar{H}$, so folgt

$$d^{1,0} \text{vol}_{F_b} = -\pi^* \bar{H}^\vee \wedge \text{vol}_{F_b}, \quad \bar{H}^\vee \text{ dual zu } \bar{H} \text{ bezüglich } g^B.$$

Weitere Aussagen liefert Lemma 1.7.2 in [GLP]:

Lemma 3.13 ([GLP]). *Ist die horizontale Distribution einer Riemannschen Submersion $\pi : M \rightarrow B$ integrabel, so gibt es lokale Koordinaten $m = (y, b)$ in M , so dass $\pi(m) = b$, und in diesen Koordinaten hat die Metrik auf M die Form*

$$g^M = h_{ij}(b) db^i \otimes db^j + f_{\alpha\beta}(y, b) dy^\alpha \otimes dy^\beta \quad (42)$$

Wenn zusätzlich B einfach zusammenhängend ist, so ist $\pi : M \rightarrow B$ global ein Produkt mit Metrik (42).

Beispiel. Sei G/K ein symmetrischer Raum vom nicht-kompakten Typ, wobei $K \subset G$ eine maximale kompakte Untergruppe der nicht-kompakten, halbeinfachen Liegruppe G ist. Genauer ist G die Gruppe der reellen Punkte einer halbeinfachen algebraischen Gruppe $\mathbf{G} \subset GL(n, \mathbb{C})$, die über \mathbb{Q} definiert ist. Sei $\Gamma \subset G$ ein arithmetisches Gitter⁶ vom \mathbb{Q} -Rang 1, so dass $X = \Gamma \backslash G/K$ ein lokal symmetrischer Raum vom \mathbb{Q} -Rang 1 ist. Diese Situation wird auch in den Arbeiten [Har] und [Har2] betrachtet. Sei \mathbf{P} eine rationale parabolische Untergruppe von \mathbf{G} und $P = \mathbf{P}(\mathbb{R})$. Dann ist P eine parabolische Untergruppe von G und es gibt eine „rationale horozyklische Zerlegung“ ([Web, S.141])

$$G/K \cong A_P \times N_P \times X_P.$$

Ferner induziert $\Gamma \cap P$ eine diskrete Gruppe Γ_P , die auf X_P operiert. Der „Spitze“ Z entspricht dann

$$(\Gamma \cap P) \backslash (G/K) \cong A_P \times (\Gamma \cap P) \backslash (N_P \times X_P)$$

Die Basis der Spitze ist $M = (\Gamma \cap P) \backslash (N_P \times X_P)$, und die kanonische Projektion $N_P \times X_P \rightarrow X_P$ induziert eine Faserung $M \rightarrow B$, mit $B = \Gamma_P \backslash X_P$. Proposition 2.9 in [Web] bzw. Proposition 4.3 in [Bo] beschreiben die lokale Form der Metrik auf M , und es folgt, dass die horizontale Distribution von $\pi : M \rightarrow B$ integrabel ist. Darüber hinaus zeigt Borel im Beweis von [Bo, Korollar 4.4], dass horizontaler Paralleltransport die Volumenform der Fasern von π erhält. Wegen Gleichung (41) sind die Fasern von π minimal, insbesondere ist auch (B) erfüllt.

3.8 Spektrale Sequenz

In diesem Kapitel soll die de Rham-Kohomologie $H^*(M)$ unter den Voraussetzungen aus Kapitel 3.7 untersucht werden. Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist die Spektralsequenz des Faserbündels $M \rightarrow B$.

Sei für $0 \leq n \leq \dim M$

$$F_i \Omega^n(M) := \left\{ \omega \in \Omega^n(M) \mid \omega(Y_1, \dots, Y_n) = 0, \text{ falls } n - i + 1 \right. \\ \left. \text{der Vektorfelder vertikal sind.} \right\}$$

sowie $F_q := F_0$ für $q < 0$ und $F_q = 0$ für $q > n$.

Im Folgenden sei Ω^j Abkürzung für $\Omega^j(M)$. Eine Form $\omega \in F_i \Omega^n$ kann als Summe von Elementen der Form $\pi^* \eta^{(k)} \wedge \psi^{(n-k)}$ mit $\eta^{(k)} \in \Omega^k(B)$, $\psi^{(n-k)} \in \Omega^V(M)$ für $k \geq i$ geschrieben werden.

Die $F_i := F_i \Omega^n$ bilden eine Filtration von Ω^n

$$\Omega^n = F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} = 0,$$

und d^M ist mit dieser verträglich, $d^M(F_i \Omega^n) \subset F_i \Omega^{n+1}$, denn

$$d^M(\pi^* \eta \wedge \psi) = \pi^* d^B \eta \wedge \psi + (-1)^k \eta \wedge d^M \psi \text{ für } \eta \in \Omega^k(B)$$

⁶siehe [Web], Definition 2.1

Aus dieser Filtration wird wie üblich eine Spektralsequenz konstruiert, siehe z.B. [McC], Kapitel 2.2. Immer ist $q := n - p$. Zunächst sei

$$\begin{aligned} Z_{-1}^{p,q} &= Z_0^{p,q} = F_p \Omega^{p+q}, & B_0^{p,q} &= 0 \\ E_0^{p,q} &:= \frac{F_p \Omega^{p+q}}{F_{p+1} \Omega^{p+q}} = \frac{Z_0^{p,q}}{B_0^{p,q} + Z_{-1}^{p+1,q-1}} \end{aligned}$$

Durch d^M wird eine Abbildung $d_0^{p,q} := E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+1}$ induziert. Für $r \geq 1$ wird definiert

$$\begin{aligned} \bar{Z}_r^{p,q} &= \ker d_0^{p,q} : E_0^{p,q} \rightarrow E_0^{p,q+r} \\ \bar{B}_r^{p,q} &= \operatorname{im} d_0^{p,q-r} : E_0^{p,q-r} \rightarrow E_0^{p,q} \\ Z_r^{p,q} &= \ker d_0^{p,q} : F_p \Omega^{p+q} \rightarrow \Omega^{p+q+1} / F_{p+r} \Omega^{p+q+1} \\ B_r^{p,q} &= (\operatorname{im} d_0^{p,q-r} : F_{p-r} \Omega^{p+q-1} \rightarrow \Omega^{p+q}) \cap F_p \Omega^{p+q} \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{Z}_r^{p,q}$ das Bild von $Z_r^{p,q}$ in $E_0^{p,q}$, und $\bar{B}_r^{p,q}$ ist das Bild von $B_r^{p,q}$ in $E_0^{p,q}$.

$$E_r^{p,q} = \frac{\bar{Z}_r^{p,q}}{\bar{B}_r^{p,q}} = \frac{Z_r^{p,q}}{B_r^{p,q} + Z_{r-1}^{p+1,q-1}}$$

Das Differential

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

ist das Differential d^M auf Ω^{p+q} , eingeschränkt auf $E_r^{p,q}$, d.h. das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} Z_r^{p,q} & \xrightarrow{d} & Z_r^{p+r,q-r+1} \\ \downarrow & & \downarrow \text{proj.} \\ E_r^{p,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

Die folgenden Überlegungen finden sich im Wesentlichen in [Dai], S.316ff. Seien X_i horizontale Vektorfelder, U_j vertikal. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varrho : \frac{F_i \Omega^n}{F_{i+1} \Omega^n} &\rightarrow \Omega^i(B, W^{(n-i)}) = C^\infty(B, \pi^* \Lambda^i T^* B \otimes W^{(n-i)}) \\ [\omega] &\mapsto \tilde{\omega} \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_i)(U_1, \dots, U_{n-i}) := \omega(X_1, \dots, X_i, U_1, \dots, U_{n-i})$$

Offenbar ist $\tilde{\omega}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten. Umgekehrt sei

$$\omega(X_1, \dots, X_l, U_1, \dots, U_{n-l}) := \begin{cases} \tilde{\omega}(X_1, \dots, X_l)(U_1, \dots, U_{n-l}), & \text{falls } l = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit ist ϱ ein Isomorphismus, insbesondere

$$E_0^{i,n-i} = \Omega^i(B, W^{(n-i)})$$

Schreibe ab jetzt immer $j := n - i$.

Es soll \mathbf{d}_0 unter dieser Identifikation berechnet werden. Sei dazu $[\omega] \in E_0^{i,j}$, also $\tilde{\omega} \in \Omega^i(B, W^{(j)})$. Nach Definition ist $\mathbf{d}_0^{i,n-i}[\omega] = [d^M \omega] \in E_0^{i,n-i+1}$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$(d^M \omega)(X_1, \dots, X_i, U_1, \dots, U_{n-i+1}) = (-1)^i d^F(\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_i))(U_1, \dots, U_{n-i+1})$$

mit dem Differential $d^F \in C^\infty(B, \text{Hom}(W^\bullet, W^{\bullet+1}))$ entlang der Fasern, also

$$\mathbf{d}_0^{i,n-i} = (-1)^i \varrho^{-1} d^F \varrho.$$

Damit kann $E_1^{p,q}$ mit $\Omega^p(B, H^q(F))$ identifiziert werden. Das Theorem von Hodge gibt schließlich eine Identifikation

$$E_1^{i,n-i} = \Omega^i(B, \mathcal{H}^{n-i}(F))$$

mit den faserharmonischen Formen.

Jetzt soll \mathbf{d}_1 berechnet werden. Sei $[\omega] \in E_1^{i,j}$, also $\tilde{\omega} \in \Omega^i(B, \mathcal{H}^j(F))$. Nach Definition $\mathbf{d}_1^{i,j}[\omega] = [d^M \omega] \in E_1^{i+1,j}$. Dabei ist zu beachten, dass $d^M \tilde{\omega} \in F_{i+1} \Omega^{i+j+1}(M)$ ein Repräsentant in $E_1^{i+1,j}$ ist, weil $d^F \tilde{\omega} = 0$.

Sei ∇ der Zusammenhang auf $T^V M$, so dass $\nabla_X U = [X, U] = \text{Lie}_X U$. Dieser induziert den Zusammenhang ∇^W auf $\Omega^*(B, W)$. In [Dai] wird gezeigt, dass

$$\begin{aligned} (d^M \omega)(X_1, \dots, X_{i+1}, U_1, \dots, U_j) &= \sum_k (-1)^k (\text{Lie}_{X_k}(\tilde{\omega}(X_1, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{i+1}))) (U_1, \dots, U_j) \\ &= \nabla^W(\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_{i+1}))(U_1, \dots, U_j) \end{aligned}$$

Sei Π_0 die faserweise Projektion auf die faserharmonischen Formen, die durch das Hodge-Theorem induziert wird. Es wurde gezeigt

$$\mathbf{d}_1^{i,n-i} = \varrho^{-1} \Pi_0 \nabla^W \Pi_0 \varrho$$

Hierbei ist zu bemerken, dass $\nabla^W \Pi_0$ im Allgemeinen nicht faserweise harmonisch ist. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass $\Pi_0 \nabla^W \Pi_0 = \nabla^W \Pi_0$, ist, dass die mittlere Krümmung der Fasern projizierbar ist.

Es gilt jedoch immer

$$\nabla^W \Omega^p(B, H^q(F)) \subset \Omega^{p+1}(B, H^q(F)).$$

Schließlich ist

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \mathcal{H}^q(F)).$$

Unter der weiteren Voraussetzung $d^{2,-1} = 0$ zeigt Dai, dass die spektrale Sequenz bei E_2 degeneriert, also

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q} = H^p(B, H^q(F)).$$

Satz 3.14. *Die mittlere Krümmung H der Fasern sei projizierbar und $\pi : M \rightarrow B$ flach. Dann ist*

$$H^r(B, \mathcal{H}^s(F)) = \mathcal{H}^r(B, \mathcal{H}^s(F)) := \{\omega \in \Omega^r(B, \mathcal{H}^s(F)) \mid \Delta_{1,0}\omega = 0\}$$

und

$$H^p(M) = \bigoplus_{r+s=p} \mathcal{H}^r(B, \mathcal{H}^s(F))$$

Beweis. Unter der Annahme projizierbarer mittlerer Faserkrümmung gibt es eine Hodge-Zerlegung von $\Omega^r(B, \mathcal{H}^s(F))$ bezüglich $\Delta_{1,0}$,

$$\Omega^{r,s} = \mathcal{H}^{r,s} \oplus \ker d^{1,0} \oplus \text{im } \delta^{1,0}.$$

Das beweist die erste Behauptung, und die zweite Behauptung folgt aus $H^p(M) = E_\infty^p = \bigoplus_{r+s=p} E_\infty^{r,s}$, siehe z.B. [Bo-Tu] sowie Dais Rechnung. \square

3.9 Parametrix

Unter den Bedingungen aus Kapitel 3.7 ist die Konstruktion einer Parametrix der Resolvente des Laplaceoperators Δ_X auf $L^2\Omega^*(X)$ völlig analog zum Funktionenfall, siehe Kapitel 2.5.1. Wie dort wird die Parametrix $Q(\lambda)$ von $(\Delta_X - \lambda)^{-1}$ durch Verkleben eines inneren Teiles $Q_1(\lambda)$ und eines äußeren Anteils $Q_2(\lambda) = (\Delta_Z - \lambda)^{-1}$ konstruiert. Wieder lässt Δ_Z die Zerlegung

$$L^2\Omega^p(Z) = L_{\text{cusp}}^2\Omega^p(Z) \oplus L_1^2\Omega^p(Z)$$

in Spitzenformen (Definition 3.11) und ihr orthogonales Komplement invariant. Seien

$$\Delta_{\text{cusp}} = \Pi_\perp \Delta_Z \Pi_\perp = \Delta_Z \Pi_\perp, \quad \Delta_{1;Z} = \Pi_0 \Delta_Z \Pi_0 = \Delta_Z \Pi_0$$

die Einschränkungen von Δ_Z auf $L_{\text{cusp}}^2\Omega^p(Z)$ bzw. $L_1^2\Omega^p(Z)$. Dann gilt

$$(\Delta_Z - \lambda)^{-1} = (\Delta_{\text{cusp}} - \lambda)^{-1} + (\Delta_{1;Z} - \lambda)^{-1}.$$

Die Resolvente von Δ_{cusp} ist kompakt, mit Resolventenkern

$$K_{\text{cusp}}(\lambda, x_1, x_2) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \psi_i(x_1) \otimes \overline{\psi_i(x_2)}$$

für Eigenformen ψ_i von Δ_{cusp} zum Eigenwert λ_i .

Bezüglich der Zerlegung $\Omega^p(Z) = C^\infty(\mathbb{R})\Omega^p(M) \oplus C^\infty(\mathbb{R})\Omega^{p-1}(M)$ gilt (Kap. 3.7)

$$\tilde{\varrho}_u \Delta_{1;Z} \tilde{\varrho}_u^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_u & 0 \\ 0 & \tilde{T}_u \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_u = -\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + \Delta_{1,0}.$$

Der Integralkern $K_1^{(p)}$ von $(\tilde{\varrho}_u \tilde{T}_u \tilde{\varrho}_u^{-1} - \lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist durch

$$\begin{aligned} & K_1^{(p)}(\lambda, (u, y), (r, z)) \\ &= \sum_k \sum_{\mu^{(k)}} \frac{i}{2} e^{a_k(u+r)} \frac{e^{i|u-r|\sqrt{\lambda-d_k^2-\mu^{(k)}}} - e^{i(u+r)\sqrt{\lambda-d_k^2-\mu^{(k)}}}}{\sqrt{\lambda-d_k^2-\mu^{(k)}}} (\phi_\mu^{(k)})(y) \otimes (\overline{\phi_\mu^{(k)}})(z) \end{aligned} \tag{43}$$

gegeben, wobei die $\phi_\mu^{(k)} \in \Omega^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$ eine lokale ON-Basis bilden, mit $\Delta_{1,0}\phi_\mu^{(k)} = \mu^{(k)}\phi_\mu^{(k)}$.

Schließlich ist $K_{\text{cusp}} + K_1^{(p)} + du \wedge K_1^{(p-1)}$ der Integralkern von $(\Delta_Z - \lambda)^{-1}$.

Für die späteren Anwendungen genügt es, die Resolvente in eine Umgebung von $\lambda = 0$ fortzusetzen. Sei

$$\tau = \min(\{\mu + (f/2 - k)^2 \mid \mu \text{ Eigenwert von } \Delta_{1,0} : \Omega^{*,k} \rightarrow \Omega^{*,k}, 0 \leq k \leq f\} \setminus \{0\})$$

und $0 < \varepsilon < \tau$. Bis auf $\sqrt{\lambda}$ sind sämtliche Wurzeln in (43) holomorph für $\lambda \in B_\varepsilon(0)$. Benötigt wird also nur die Fortsetzung der Wurzelfunktionen auf Σ_s^1 , die Riemannsche Fläche zu $z \mapsto \sqrt{z}$. Ist dann

$$\Lambda \in \Omega_\varepsilon := (\text{FP} \cup \pi_s^{-1}(B_\varepsilon(0))) \cap \Sigma_s^{(\tau)}$$

so sind die Koeffizienten im Resolventenkern (43) in $L_{-\alpha}^2(\mathbb{R}^+, du) = e^{\alpha u} L^2(\mathbb{R}^+, du)$ mit $\alpha > 0$. Damit definiert der Resolventenkern für $\Lambda \in \Omega_\varepsilon$ einen Operator $L_\alpha^2 \rightarrow L_{-\alpha}^2$.

Wie in Kapitel 2.5.1 wird gefolgert, dass die Parametrix $Q(\Lambda)$ eine Fortsetzung zu einer Familie stetiger Operatoren

$$Q(\Lambda) : \tilde{\varrho}_u^{-1} e^{-\alpha u} L^2 \Omega^*(\mathbb{R}^+ \times M) \rightarrow \tilde{\varrho}_u^{-1} e^{\alpha u} L^2 \Omega^*(\mathbb{R}^+ \times M), \quad \Lambda \in \Omega_\tau$$

besitzt, und als Verallgemeinerung von Theorem 2.19 erhalten wir für $0 < \varepsilon < \tau$

Theorem 3.15. *Für $\delta^2 > \varepsilon > 0, \varepsilon < \tau$, lässt sich die Resolvente $(\Delta - \lambda)^{-1}$ analytisch zu einer in $\Lambda \in \Omega_\varepsilon$ meromorphen Familie von Operatoren $R(\Lambda) \in \mathcal{B}(L_\delta^2 \Omega^p(X), L_{-\delta}^2 \Omega^p(X))$ fortsetzen.*

Bemerkung 3.16. Eine ähnliche Aussage gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$, dann muss δ hinreichend groß gewählt werden. \diamond

Weil $\Omega_c^p(X) \subset L_a^2 \Omega^p(X) \subset L_{\text{loc}}^2 \Omega^p(X)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $\Sigma_s = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon$, folgt

Korollar 3.17. *Die Resolvente $(\Delta - \lambda)^{-1}$ besitzt eine analytische Fortsetzung zu einer in $\Lambda \in \Sigma_s$ meromorphen Familie von Operatoren $R(\Lambda) : \Omega_c^p(X) \rightarrow L_{\text{loc}}^2 \Omega^p(X)$.*

3.10 Verallgemeinerte Eigenformen

Unter den Voraussetzungen aus Kapitel 3.7 ist es nun möglich, explizit die verallgemeinerten Eigenformen von Δ_X zu konstruieren.

Eine Element aus $\Omega^{l,k} = \Omega^l(B, \mathcal{H}^k(F))$ ist ein Schnitt im endlichdimensionalen Vektorbündel $W_0^{k+l} = \Lambda^l T^* B \otimes \mathcal{H}^k(F)$ über B . Damit gibt es eine Orthonormalbasis $\{\phi_\mu\}$ von $L^2(B, W_0^{k+l})$ aus Eigenformen von $\Delta_{1,0}$:

$$\Delta_{1,0}\phi_\mu = \mu\phi_\mu, \quad \phi_\mu \in \Omega^{l,k}.$$

Sei $\psi \in \Omega^{*,k}$ eine faserharmonische und vom Fasergrad k , so dass

$$\Delta_{1,0}\psi = \mu\psi.$$

Sei $z \mapsto \sqrt{z}$ der Zweig der Wurzel, für den $\text{Im} \sqrt{z} > 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Dann sind $f_{\mu,k,\pm}(u) = e^{\pm i \sqrt{\lambda - \mu - (f/2 - k)^2} u}$ die Lösungen von

$$(-\partial_u^2 + (f/2 - k)^2 + \mu - \lambda)f = 0.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [(f/2 - k)^2 + \mu, \infty)$ ist $f_{\mu,k,+} \in L^2(\mathbb{R}^+, du)$ und f_- ist nicht quadratintegrierbar.

Definition 3.18.

$$e_{\mu,k,\pm}(\lambda, \psi, (u, x)) := \tilde{\varrho}_u^{-1} f_{\mu,k,\pm}(u) \psi(x) = e^{\left(\frac{f}{2} - k \pm i \sqrt{\lambda - \mu - (f/2 - k)^2}\right) u} \psi(x), \quad x \in M$$

Nach Definition von $\tilde{\varrho}$ ist

$$e_{\pm}(\Lambda, \psi) \in L^2 \Omega^*(Z, g^Z) \iff f_{\pm}(\Lambda) \in L^2(\mathbb{R}^+, du).$$

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.7 gilt

$$\Pi_0 \tilde{T}_u \Pi_0 (f_{\pm}(u) \psi) = \tilde{T}_u (f_{\pm}(u) \psi) = \lambda (f_{\pm}(u) \psi)$$

Außerdem ist $Q_u (f_{\pm}(u) \psi) = 0$, also

$$\begin{aligned} \Delta_Z e_{\mu,k,\pm}(\lambda, \psi, (u, x)) &= \lambda e_{\mu,k,\pm}(\lambda, \psi, (u, x)) \\ \Delta_Z (du \wedge e_{\mu,k,\pm}(\lambda, \psi, (u, x))) &= \lambda (du \wedge e_{\mu,k,\pm}(\lambda, \psi, (u, x))) \end{aligned}$$

Die $e_{\mu,\pm}$ selbst erfüllen nicht die Randbedingungen (36). Deshalb bilden wir wie in Kapitel 2.5.3 die Linearkombination

$$\text{SIN}_{\mu} = \frac{1}{2i} (e_{\mu,+} - e_{\mu,-}).$$

Wie dort kann dann gezeigt werden, dass ein vollständiges System von verallgemeinerten Eigenformen von Δ_Z gegeben ist durch

$$\{\text{SIN}_{\mu,k,\pm}(\psi), du \wedge \text{SIN}_{\mu,k,\pm}(\psi) \mid 0 \leq k \leq f, (\mu, \psi) \text{ so dass } \psi \in \Omega^*(B, \mathcal{H}^k(F)), \Delta_{1,0} \psi = \mu \psi\}$$

Die auftretenden Wurzelfunktionen lassen sich wieder auf die Spektrale Fläche Σ_s (Kapitel 2.5.2) analytisch fortsetzen. Die Verzweigungspunkte sind jetzt gegeben durch

$$\{\mu + (\frac{f}{2} - k)^2 \mid \mu \in \sigma(\Delta_{1,0}), \quad 0 \leq k \leq f/2\}.$$

Die Funktionen e_{\pm} besitzen eine Fortsetzung nach Σ_s :

$$\begin{aligned} e_{\mu,k,\pm}(\Lambda, \psi, (u, x)) &:= \tilde{\varrho}_u^{-1} f_{\mu,k,\pm}(\Lambda, u) \psi(x), \quad \Lambda \in \Sigma_s \\ \text{mit} \quad f_{\mu,k,\pm}(\Lambda, u) &:= e^{\pm i \sqrt{\Lambda - \mu - (f/2 - k)^2} u} \end{aligned}$$

Sei $\psi \in \Omega^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$ eine Eigenform von $\Delta_{1,0}^{p-k}$ zum Eigenwert μ , $\Lambda \in \Sigma_s$ und $\lambda = \pi_s(\Lambda)$.

Mit einer Abschneidefunktion χ auf X mit $\text{supp } \chi \subset Z$, und der Fortsetzung $R(\Lambda)$ der Resolvente von $\Delta_X - \lambda$ werden wie üblich die verallgemeinerten Eigenformen von Δ_X definiert:

$$\begin{aligned} E_\mu(\Lambda, \psi)(p) &:= \chi(p)e_{\mu,k,-}(\Lambda, \psi, p) - R(\Lambda)(\Delta_X - \lambda)(\chi(p)e_{\mu,k,-}(\Lambda, \psi, p)) \\ E_\mu(\Lambda, du \wedge \psi)(p) &:= \chi(p)du \wedge e_{\mu,k,-}(\Lambda, \psi, p) \\ &\quad - R(\Lambda)(\Delta_X - \lambda)(\chi(p)du \wedge e_{\mu,k,-}(\Lambda, \psi, p)) \end{aligned}$$

Wie im Funktionenfall (Kapitel 2.5.3) ist die verallgemeinerte Eigenform $E_\mu(\Lambda, \psi)$ eindeutig durch die drei Eigenschaften

- 1) $E_\mu(\Lambda, \psi) \in \Omega^p(X)$ und $E_\mu(\Lambda, \psi)$ ist meromorph in $\Lambda \in \Sigma_s$.
- 2) Für $\Lambda \in \Sigma_s$ gilt $\Delta E_\mu(\Lambda, \psi) = \pi_s(\Lambda)E_\mu(\Lambda, \psi)$
- 3) Für $\Lambda \in \text{FP}$ ist $E_\mu(\Lambda, \psi) - \chi e_{-, \mu}(\Lambda, \psi) \in L^2\Omega^p(X)$.

definiert.

Ebenfalls wie dort kann mit Hilfe der Wellenoperatoren gezeigt werden, dass die $\{E_\mu\}$ ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenformen von $\Delta_X P_{ac}$ bilden.

Wir haben gesehen, dass das wesentliche Spektrum von Δ_X durch die faserharmonischen Formen bestimmt wird. Analog zum Funktionenfall wird der faserharmonische Anteil $\Pi_0(E_\mu \upharpoonright [1, \infty) \times M)$ von E_μ als *konstanter Term* von E_μ bezeichnet.

Ein Ziel dieser Arbeit ist, Repräsentanten von Kohomologieklassen aus verallgemeinerten Eigenformen zu konstruieren. Deshalb möchten wir jeder Kohomologieklassse in $[\phi] \in H^*(M)$, $[\phi] \neq 0$ eine verallgemeinerte Eigenform zuordnen.

Zunächst ist nach Satz 3.14

$$H^p(M) = \bigoplus_k H^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$$

Sei $[\phi] \in H^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$. Nach der Hodge-Zerlegung ist

$$H^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F)) = \mathcal{H}^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$$

es gibt also einen eindeutigen $\Delta_{1,0}$ -harmonischen Repräsentanten ϕ_0 von $[\phi]$, und falls $\Delta_{1,0}\phi = \mu\phi$ mit $\mu \neq 0$, so ist $[\phi] = 0 \in H^p(M)$.

Deshalb betrachten wir ab jetzt nur verallgemeinerte Eigenformen zu $\mu = 0$ und definieren

$$E(\Lambda, [\phi]) := E_0(\Lambda, \phi) \quad \text{für } \phi \in \mathcal{H}^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F)).$$

3.11 Asymptotik des konstanten Terms

Wir möchten die asymptotische Entwicklung des konstanten Terms $\Pi_0 E(\Lambda, \psi)$ bestimmen.

Sei dazu

$$e_{\pm, \nu}(\Lambda, \phi) = e^{(\underline{a} \pm i\sqrt{\Lambda - \nu - \underline{d}^2})u} \phi, \quad \phi \in \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)), \quad \Delta_{1,0} \phi = \nu \phi, \quad \Lambda \in \Sigma_s$$

Sei $\psi \in \mathcal{H}^{p-k, k} := \mathcal{H}^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F)) \subset \mathcal{H}^p(M)$.

Entwicklung nach Eigenformen von $\Delta_{1,0} : \Omega^{p-l, l} \rightarrow \Omega^{p-l, l}$ für jeden Basisgrad $p-l$ ergibt wegen $(\Delta_Z - \pi_s(\Lambda))\Pi_0 E(\Lambda, \psi) = 0$

$$\begin{aligned} \Pi_0 E(\Lambda, \psi) &= e_{-,0}(\Lambda, \psi) + \sum_{l=0}^f e_{+,0}(\Lambda, \psi_0^l) + du \wedge \sum_{l=0}^f e_{+,0}(\Lambda, \hat{\psi}_0^l) \\ &\quad + \sum_{l=0}^f \sum_{\nu_l > 0} e_{+, \nu_l}(\Lambda, \psi_{\nu_l}^l) + \sum_{l=0}^f \sum_{\gamma_l > 0} du \wedge e_{+, \gamma_l}(\Lambda, \hat{\psi}_{\gamma_l}^l) \end{aligned} \quad (44)$$

Dabei sind $\psi_\nu^l \in \Omega^{p-l, l}$, $\hat{\psi}_\gamma^l \in \Omega^{p-l+1, l-1}$ Eigenformen von $\Delta_{1,0}$,

$$\Delta_{1,0} \psi_{\nu_l}^l = \nu_l \psi_{\nu_l}^l, \quad \Delta_{1,0} \hat{\psi}_{\gamma_l}^l = \gamma_l \hat{\psi}_{\gamma_l}^l.$$

Die Indizes der Eigenwerte von $\Delta_{1,0}$ werden im Folgenden unterdrückt. Sei $\mathcal{E}_\nu^{a,b} \subset \Omega^a(B, \mathcal{H}^b(F))$ der Eigenraum von $\Delta_{1,0}$ zum Eigenwert ν . Wir definieren jetzt lineare, in $\Lambda \in \Sigma_s$ meromorphe Operatoren

$$S_{0\nu}^{[l]}(\Lambda), \quad T_{0\nu}^{[l]}(\Lambda) : \mathcal{E}_0^{*,l} \rightarrow \mathcal{E}_\nu^{*,l}$$

durch (44) als

$$T_{0\nu}^{[l]}(\Lambda, \psi) := \psi_\nu^l, \quad S_{0\gamma}^{[l]}(\Lambda, \psi) := \hat{\psi}_\gamma^l.$$

Von besonderem Interesse ist der Eigenwert 0 und der entsprechende Operator

$$T_{00}^{[l]}(\Lambda, \cdot) : \mathcal{H}^p(M) \rightarrow \mathcal{H}^{p-l, l}, \quad 0 \leq l \leq f.$$

Manchmal verwenden wir auch die abkürzende Schreibweise $T_{00} = \sum_{l=0}^f T_{00}^{[l]}$.

Mit diesen Bezeichnungen wird (44) zu

$$\begin{aligned} \Pi_0 E(\Lambda, \psi) &= e_{-,0}(\Lambda, \psi) + e_{+,0}(\Lambda, T_{00}(\Lambda, \psi)) \\ &\quad + du \wedge e_{+,0}(\Lambda, S_{00}(\Lambda, \psi)) \\ &\quad + \sum_{\nu > 0} e_{+, \nu}(\Lambda, T_{0\nu}(\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu > 0} du \wedge e_{+, \nu}(\Lambda, S_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \end{aligned} \quad (45)$$

Die beiden Reihen $\sum_{\nu > 0}$ sind schnell fallend in u , und alle Terme bis auf $e_{-,0}(\Lambda, \psi)$ sind für $\Lambda \in \text{FP}$ in $L^2 \Omega^*(X)$. Es wird sich zeigen, dass der Term $du \wedge e_{+,0}(\Lambda, S_{00}(\Lambda, \psi))$ in 45 nicht auftritt.

Für $\phi \in \Omega^*(B, W)$ ist

$$\begin{aligned} d^Z(e_{\pm, \mu}(\Lambda, \phi)) &= (\underline{a} \pm i\sqrt{\Lambda - \mu - \underline{d}^2}) du \wedge e_{\pm, \mu}(\Lambda, \phi) + e_{\pm, \mu}(\Lambda, d^Z \phi) \\ d^Z(du \wedge e_{\pm, \mu}(\Lambda, \phi)) &= -du \wedge d^M(e_{\pm, \mu}(\Lambda, \phi)) \end{aligned}$$

Sei jetzt immer $\psi \in \mathcal{H}^*(B, \mathcal{H}^k(F))$. Zunächst ist für $\Lambda \in \text{FP}$

$$\begin{aligned}
d^Z \Pi_0 E_0(\Lambda, \psi) &= (\underline{a} - i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2}) du \wedge e_{-,0}(\Lambda, \psi) \\
&\quad + (\underline{a} + i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2}) du \wedge e_{+,0}(\Lambda, T_{00}(\Lambda, \psi)) \\
&\quad + \sum_{\nu > 0} \left\{ (\underline{a} + i\sqrt{\Lambda - \nu - \underline{d}^2}) du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, T_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \right. \\
&\quad \left. + e_{+,\nu}(\Lambda, d^{1,0}(\Lambda, T_{0\nu}(\Lambda, \psi))) \right\} \\
&\quad - \sum_{\nu > 0} du \wedge d^{1,0}(e_{+,\nu}(\Lambda, S_{0\nu}(\Lambda, \psi))) \quad (46)
\end{aligned}$$

denn $d^{1,0}(T_{00}\psi) = 0$, $d^F(T_{0\nu}\psi) = 0$, $d^M(S_{00}\psi) = 0$.

Entsprechend (45) hat $E(\Lambda, du \wedge \psi)$ eine asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}
\Pi_0 E(\Lambda, du \wedge \psi) &= du \wedge e_{-,0}(\Lambda, \psi) + du \wedge e_{+,0}(\Lambda, \check{T}_{00}(\Lambda, \psi)) \\
&\quad + e_{+,0}(\Lambda, \check{S}_{00}(\Lambda, \psi)) \\
&\quad + \sum_{\nu > 0} e_{+,\nu}(\Lambda, \check{S}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu > 0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, \check{T}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \quad (47)
\end{aligned}$$

mit gewissen linearen, in Λ meromorphen Abbildungen $\check{T}_{0,\nu}, \check{S}_{0,\nu} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_\nu$, die wie oben definiert sind.

Vergleich von (46) und (47) ergibt mit der Eindeutigkeit der verallgemeinerten Eigenformen

$$dE(\Lambda, \psi) = (\underline{a} - i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2})(\psi)E(\Lambda, du \wedge \psi). \quad (48)$$

Da in (46) kein entsprechender Term auftritt, kann auch $e_{+,0}(\Lambda, \check{S}_{00}(\Lambda, \psi))$ in (47) nicht vorkommen, und Vergleich der entsprechenden Koeffizienten liefert

$$(\underline{a} - i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2})(\psi)\check{T}_{00}(\Lambda, \psi) = (\underline{a} + i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2})(T_{00}(\Lambda, \psi)). \quad (49)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
*\Pi_0 E(\Lambda, du \wedge \psi) &= e_{-,0}(\Lambda, *^M \psi) + e_{+,0}(\Lambda, *^M \check{T}_{00}(\Lambda, \psi)) \\
&\quad + \sum_{\nu > 0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, *^M \check{T}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu > 0} (-1)^\nu du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, *^M \check{S}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \quad (50)
\end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit (45) für $*^M \psi$, so folgt zuerst

$$E(\Lambda, *^M \psi) = *E(\Lambda, du \wedge \psi), \quad (51)$$

und daraus, dass in (45) der Term $du \wedge e_{+,0}(\Lambda, S_{00}(\Lambda, \psi))$ nicht auftritt, sowie

$$T_{00}(\Lambda, *^M \psi) = *^M \check{T}_{00}(\Lambda, \psi).$$

Weiter ergibt Koeffizientenvergleich unter Verwendung von (49) und (51)

$$(\underline{a} - i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2})(\psi)T_{00}(\Lambda, *^M \psi) = *^M (\underline{a} + i\sqrt{\Lambda - \underline{d}^2})(T_{00}(\Lambda, \psi)). \quad (52)$$

Insgesamt

Satz 3.19. *Die asymptotische Entwicklung des konstanten Terms von $E(\psi, \Lambda)$ mit $\psi \in \mathcal{H}^*(B, \mathcal{H}^k(F))$ lautet*

$$\begin{aligned} \Pi_0 E(\Lambda, \psi) &= e_{-,0}(\Lambda, \psi) + e_{+,0}(\Lambda, T_{00}(\Lambda, \psi)) \\ &\quad + \sum_{\nu>0} e_{+,\nu}(\Lambda, T_{0\nu}(\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu>0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, S_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \end{aligned} \quad (53)$$

mit linearen, in Λ meromorphen Abbildungen $T_{0\nu}, S_{0\nu} : \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_\nu$.

Entsprechend

$$\begin{aligned} \Pi_0 E(\Lambda, du \wedge \psi) &= du \wedge e_{-,0}(\Lambda, \psi) + du \wedge e_{+,0}(\Lambda, \check{T}_{00}(\Lambda, \psi)) \\ &\quad + \sum_{\nu>0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, \check{T}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu>0} e_{+,\nu}(\Lambda, \check{S}_{0\nu}(\Lambda, \psi)) \end{aligned} \quad (54)$$

Jetzt soll noch eine Funktionalgleichung für T_{00} bestimmt werden. Seien $\gamma_{\nu k}$ die in Kapitel 2.5.2 beschriebenen Erzeugenden von $\text{Aut}(\Sigma_s)$. Dabei ist $\gamma_{\nu k}$ dem Verzweigungspunkt $\nu + d_k^2$ zugeordnet. Genauer ist $\gamma_{\nu k} : \Sigma_s \rightarrow \Sigma_s$ eine Decktransformation, die durch eine geschlossene Kurve definiert wird, die genau den Verzweigungspunkt $\nu + d_k^2$ umläuft.

Lemma 3.20. *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$E(\Lambda, \psi) = E(\gamma_{0k}\Lambda, T_{00}^{[k]}(\Lambda, \psi)) \quad (55)$$

Beweis. Wegen (25) ergibt (53)

$$\begin{aligned} \Pi_0 E(\gamma_{0k}\Lambda, \psi) &= e_{+,0}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi) + e_{-,0}(\Lambda, T_{00}^{[k]}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi)) + e_{+,0}(\Lambda, T_{00}^{[\neq k]}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi)) \\ &\quad + \sum_{\nu>0} e_{+,\nu}(\Lambda, T_{0\nu}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi)) + \sum_{\nu>0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, S_{0\nu}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi)) \end{aligned}$$

Der einzige Term auf der rechten Seite, der nicht in L^2 liegt, ist $e_{-,0}(\Lambda, T_{00}^{[k]}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi))$. Eindeutigkeit der verallg. Eigenformen liefert

$$E(\gamma_{0k}\Lambda, \psi) = E(\Lambda, T_{00}^{[k]}(\gamma_{0k}\Lambda, \psi))$$

bzw. wegen $\gamma_{0k}^2 = \text{id}$ die Behauptung. \square

3.12 Maass–Selberg Relationen

Die Maass–Selberg Relation werden wichtige Informationen über Lage der Pole sowie das asymptotische Verhalten der verallgemeinerten Eigenformen liefern. Die folgenden Rechnungen orientieren sich an [Rol].

Für $\psi \in \mathcal{H}^p(M)$ sei $\psi^{[k]}$ der Anteil in $\mathcal{H}^{p-k,k}$.

Schreibe $X = X_r \sqcup_M Z_r$ mit $Z_r := [r, \infty) \times M$. Sei $E = E_{\mu=0}$ und $E^r = E - \Pi_0(E \upharpoonright Z_r)$. Wegen Eigenschaft 3) der verallgemeinerten Eigenformen⁷ ist $E^r(\Lambda) \in L^2\Omega^*(X)$ für $\Lambda \in \text{FP}$.

⁷Siehe Seite 53

Satz 3.21. Sei ν_1 der kleinste positive Eigenwert von $\Delta_{1,0}$ und τ mit $0 < \tau < \min\{1/4, \nu_1\}$ sei kein Pol von $E(\cdot, \phi)$. Für $\phi \in \mathcal{H}^*(B, \mathcal{H}^k(F))$ mit $k \neq f/2$ gilt für die abgeschnittene verallgemeinerte Eigenform $E^r(\tau, \phi)$

$$\begin{aligned} \|E^r(\tau, \phi)\|^2 &= \frac{e^{2r\sqrt{d_k^2 - \tau}}}{2\sqrt{d_k^2 - \tau}} \|\phi\|^2 + r \cdot \sqrt{d_k^2 - \tau} \left\{ \langle T_{00}(\tau, \phi), \phi \rangle - \langle \phi, T_{00}(\tau, \phi) \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{\substack{\nu \geq 0; l \\ \nu + d_l^2 > 0}} \frac{e^{-2r\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}}}{2\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu}^{[l]}(\tau, \phi)\|^2 \end{aligned}$$

Ist $\phi \in \mathcal{H}^*(B, \mathcal{H}^{f/2}(F))$, so gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \|E^r(\tau, \phi)\|^2 &= r(\|\phi\|^2 + \|T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi)\|^2) \\ &\quad - i\sqrt{\tau} \left\{ \left\langle \frac{d}{d\lambda} |_{\tau} T_{00}^{[f/2]}(\cdot, \phi), T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi) \right\rangle - \left\langle T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi), \frac{d}{d\lambda} |_{\tau} T_{00}^{[f/2]}(\cdot, \phi) \right\rangle \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2i\sqrt{\tau}} \left\{ e^{2i\sqrt{\tau}r} \langle T_{00}(\tau, \phi), \phi \rangle - e^{-2i\sqrt{\tau}r} \langle \phi, T_{00}(\tau, \phi) \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{\substack{\nu \geq 0; l \\ \nu + d_l^2 > 0}} \frac{e^{-2r\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}}}{2\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu}^{[l]}(\tau, \phi)\|^2 \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis der Formel ist analog zu dem von Proposition 9.17 in [Mu2]. Sei $\phi \in \mathcal{H}^*(M)$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Sei $g^M = \pi^*g^B + g^F$ die unskalierte Riemannsche Metrik auf M und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ werde die induzierte L^2 -Norm auf $M \simeq \partial X_r$ bezeichnet.

Es ist $E^r \upharpoonright Z_r = \Pi_{\perp}(E \upharpoonright Z_r)$ und dort lässt $\Delta = \Delta_Z$ die faserharmonischen Formen unter den gegebenen Voraussetzungen invariant. Die Greenschen Formeln ergeben

$$\begin{aligned} &(\Delta E^r, E^r)_{L^2(X)} - (E^r, \Delta E^r)_{L^2(X)} \\ &= (\Delta(E \upharpoonright X_r), E \upharpoonright X_r)_{L^2(X_r)} + (\Delta \Pi_{\perp}(E \upharpoonright Z_r), \Pi_{\perp}(E \upharpoonright Z_r))_{L^2(Z_r)} \\ &\quad - (E \upharpoonright X_r, \Delta(E \upharpoonright X_r))_{L^2(X_r)} - (\Pi_{\perp}(E \upharpoonright Z_r), \Delta \Pi_{\perp}(E \upharpoonright Z_r))_{L^2(Z_r)} \\ &= \left\langle E(\phi, \lambda)(r, \cdot), \frac{\partial}{\partial u} \Big|_r E(\phi, \lambda) \right\rangle_{M_r} + \left\langle \Pi_{\perp} E(\phi, \lambda)(r, \cdot), -\frac{\partial}{\partial u} \Big|_r \Pi_{\perp} E(\phi, \lambda) \right\rangle_{M_r} \\ &\quad - \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \Big|_r E(\phi, \lambda), E(\phi, \lambda)(r, \cdot) \right\rangle_{M_r} - \left\langle -\frac{\partial}{\partial u} \Big|_r \Pi_{\perp} E(\phi, \lambda), \Pi_{\perp} E(\phi, \lambda)(r, \cdot) \right\rangle_{M_r} \\ &= \left\langle \tilde{\varrho}_u \Pi_0 E(\phi, \lambda)(r, \cdot), \tilde{\varrho}_u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_a \Pi_0 E(\phi, \lambda) \right\rangle_M - \left\langle \tilde{\varrho}_u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_a \Pi_0 E(\phi, \lambda), \tilde{\varrho}_u \Pi_0 E(\phi, \lambda)(r, \cdot) \right\rangle_M \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $\frac{\partial}{\partial u}$ äußeres Einheitsnormalenvektorfeld an X_r und inneres ENVF an Z_r ist, sowie dass $\tilde{\varrho}_u = e^{-ar} : \Omega^*(M_r, g_u^M) \rightarrow \Omega^*(M, g^M)$ eine Isometrie ist.

Seien $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \text{FP} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, d.h. $\text{Im } \Lambda_1 > 0, \text{Im } \Lambda_2 > 0$, sowie $\lambda_1 = \pi_s(\Lambda_1), \lambda_2 = \pi_s(\Lambda_2)$. Außerdem seien $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$. und Λ_1 kein Pol von $E(\phi)$ sowie Λ_2 kein Pol von $E(\psi)$.

$$\begin{aligned}
& (\bar{\lambda}_2 - \lambda_1)(E^r(\phi, \Lambda_1), E^r(\psi, \Lambda_2))_{L^2(X)} \\
&= (E^r(\phi, \Lambda_1), \Delta E^r(\psi, \Lambda_2)) - (\Delta E^r(\phi, \Lambda_1), E^r(\psi, \Lambda_2)) \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \Big|_r \Pi_0 E(\phi, \Lambda_1), \Pi_0 E(\psi, \Lambda_2)(r, \cdot) \right\rangle_M \\
&\quad - \left\langle \tilde{\varrho}_u \Pi_0 E(\phi, \Lambda_1)(r, \cdot), \tilde{\varrho}_u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_r \Pi_0 E(\psi, \Lambda_2) \right\rangle_M
\end{aligned}$$

Wir verwenden im Folgenden die Notation

$$s_\nu^\pm(\Lambda_1, \Lambda_2) = \sqrt{\Lambda_1 - \nu - \underline{d}^2} \pm \sqrt{\Lambda_2 - \nu - \underline{d}^2}, \quad \nu \in \sigma(\Delta_{1,0}) \quad (56)$$

Für den konstanten Term $\Pi_0 E(\Lambda, \phi)$ gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned}
\Pi_0 E(\Lambda, \phi) &= e_{-,0}(\Lambda, \phi) + e_{+,0}(\Lambda, T_{00}(\Lambda, \phi)) \\
&\quad + \sum_{\nu > 0} e_{+,\nu}(\Lambda, T_{0\nu}(\Lambda, \phi)) + \sum_{\nu > 0} du \wedge e_{+,\nu}(\Lambda, S_{0\nu}(\Lambda, \phi)) \quad (57)
\end{aligned}$$

für alle $\Lambda \in \Sigma_s$. Dabei war definiert $e_{\pm,\nu}(\Lambda, \phi) = \tilde{\varrho}_u^{-1} f_{\pm,\nu}(\Lambda, \phi)$ mit

$$f_{\pm,\nu}(\Lambda, \phi)(u) = e^{\pm i \sqrt{\Lambda - \nu - \underline{d}^2} u} \phi$$

Eingeschränkt auf M verschwinden die Terme mit $du \wedge \dots$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \tilde{\varrho}_u \frac{\partial}{\partial u} \Big|_r \Pi_0 E(\phi, \Lambda_1), \tilde{\varrho}_u \Pi_0 E(\psi, \Lambda_2)(r, \cdot) \right\rangle_M \\
&= \left\langle (-i \sqrt{\Lambda_1 - \underline{d}^2}) f_{-,0}(\Lambda_1, \phi) + \sum_{\nu \geq 0} (i \sqrt{\Lambda_1 - \nu - \underline{d}^2}) f_{+,\nu}(\Lambda_1, T_{0\nu}(\Lambda_1, \phi)), \right. \\
&\quad \left. f_{-,0}(\Lambda_2, \psi) + \sum_{\nu \geq 0} f_{+,\nu}(\Lambda_2, T_{0\nu}(\Lambda_2, \psi)) \right\rangle \quad (58)
\end{aligned}$$

Beachte nun $\sqrt{\bar{\lambda}} = -\sqrt{\lambda}$. Wir verwenden die Notation $\theta(\underline{a})\langle \phi, \psi \rangle := \sum_l \theta(a_l)\langle \phi^{[l]}, \psi^{[l]} \rangle$ für eine Funktion θ .

$$\begin{aligned}
& (\bar{\lambda}_2 - \lambda_1)(E^r(\phi, \Lambda_1), E^r(\psi, \Lambda_2)) \\
&= -is_0^- e^{-is_0^+ r} \langle \phi, \psi \rangle + \sum_{\nu \geq 0} is_\nu^- e^{is_\nu^+ r} \langle T_{0\nu}(\Lambda_1, \phi), T_{0\nu}(\Lambda_2, \psi) \rangle \\
&\quad + is_0^+ \left\{ e^{is_0^- r} \langle T_{00}(\Lambda_1, \phi), \psi \rangle - e^{-is_0^- r} \langle \phi, T_{00}(\Lambda_2, \psi) \rangle \right\} \quad (59a)
\end{aligned}$$

und schließlich wegen $s^+ s^- (\Lambda_1, \Lambda_2) = \lambda_1 - \bar{\lambda}_2$

$$\begin{aligned}
(E^r(\phi, \Lambda_1), E^r(\psi, \Lambda_2)) &= \frac{i}{s_0^+} e^{-is_0^+ r} \langle \phi, \psi \rangle \\
&\quad - \frac{i}{s_0^-} \left\{ e^{is_0^- r} \langle T_{00}(\Lambda_1, \phi), \psi \rangle - e^{-is_0^- r} \langle \phi, T_{00}(\Lambda_2, \psi) \rangle \right\} \\
&\quad - \sum_{\nu \geq 0} \frac{i}{s_\nu^+} e^{+is_\nu^+ r} \langle T_{0\nu}(\Lambda_1, \phi), T_{0\nu}(\Lambda_2, \psi) \rangle. \quad (59b)
\end{aligned}$$

Weil $\text{Im} \sqrt{z} > 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, gilt für $\varrho > 0, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sqrt{\varrho \pm i\varepsilon} &= \pm\sqrt{\varrho} + \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{\varrho}} + o(\varepsilon) \\ \sqrt{-\varrho \pm i\varepsilon} &= i\sqrt{\varrho} \pm \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varrho}} + o(\varepsilon)\end{aligned}$$

Somit folgt für $\tau > \nu + \underline{d}^2$, $\text{Im} \lambda_1 > 0, \text{Im} \lambda_2 > 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \tau} s_\nu^+(\lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\ \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \tau} s_\nu^-(\lambda_1, \lambda_2) &= 2\sqrt{\tau - \nu - \underline{d}^2}.\end{aligned}$$

Entsprechend für $\tau < \nu + \underline{d}^2$

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \tau} s_\nu^+(\lambda_1, \lambda_2) &= 2i\sqrt{\nu + \underline{d}^2 - \tau} \\ \lim_{\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow \tau} s_\nu^-(\lambda_1, \lambda_2) &= 0.\end{aligned}$$

Sei $\tau \in \partial_+ \text{FP} \simeq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, so dass $0 < \tau < \min\{1/4, \nu_1\}$ und $\varepsilon > 0$. Außerdem nehmen wir an, dass $E(\Lambda, \phi)$ in einer Umgebung von $\pi_s^{-1}(\tau)$ holomorph ist.

Wir setzen jetzt $\lambda_1 = \lambda_2 = \tau + i\varepsilon$ in (59a) und lassen ε gegen 0 konvergieren. Nur für Fasergrad $= f/2$ und $\nu = 0$ ist $\tau > \nu + \underline{d}^2$.

Spalte in Terme mit Fasergrad $f/2$ bei $\nu = 0$ und andere.

$$\begin{aligned}-2i\varepsilon \|E^r(\lambda, \phi)\|^2 &= -2i\sqrt{\tau} e^{\varepsilon r/\sqrt{\tau}} \|\phi^{[f/2]}\|^2 \\ &+ 2i\sqrt{\tau} e^{-\varepsilon r/\sqrt{\tau}} \|T_{00}^{[f/2]}\phi\|^2 \\ &- \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \left\{ e^{2i\sqrt{\tau}r} \langle T_{00}^{[f/2]}\phi, \phi^{[f/2]} \rangle - e^{-2i\sqrt{\tau}r} \langle \phi^{[f/2]}, T_{00}^{[f/2]}\phi \rangle \right\} \\ &- \frac{i\varepsilon}{\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|\phi^{[\neq f/2]}\|^2 \\ &- 2\sqrt{\underline{d}^2 - \tau} \cdot \left\{ e^{i\varepsilon r/\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \langle T_{00}^{[\neq f/2]}\phi, \phi^{[\neq f/2]} \rangle - e^{-i\varepsilon r/\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \langle \phi^{[\neq f/2]}, T_{00}^{[\neq f/2]}\phi \rangle \right\} \\ &+ \frac{i\varepsilon}{\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|T_{00}^{[\neq f/2]}\phi\|^2 \\ &+ \sum_{\nu > 0} \frac{i\varepsilon}{\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu}\phi\|^2 + o(\varepsilon)\end{aligned}\tag{61}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$, weil bei τ kein Pol liegt

$$\begin{aligned}\sqrt{\tau} \|\phi^{[f/2]}\|^2 &= \sqrt{\tau} \|T_{00}^{[f/2]}\phi\|^2 \\ &- i\sqrt{\underline{d}^2 - \tau} \cdot \left\{ \langle T_{00}^{[\neq f/2]}\phi, \phi^{[\neq f/2]} \rangle - \langle \phi^{[\neq f/2]}, T_{00}^{[\neq f/2]}\phi \rangle \right\}\end{aligned}\tag{62}$$

Wir dividieren (61) durch $2i\varepsilon$ und verwenden (62).

$$\begin{aligned}
\|E^r(\lambda, \phi)\|^2 &= \frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon} (e^{\varepsilon r/\sqrt{\tau}} - 1) \|\phi^{[f/2]}\|^2 \\
&- \frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon} (e^{-\varepsilon r/\sqrt{\tau}} - 1) \|T_{00}^{[f/2]}(\tau + i\varepsilon, \phi)\|^2 \\
&- \frac{\sqrt{\tau}}{\varepsilon} (\|T_{00}^{[f/2]}(\tau + i\varepsilon, \phi)\|^2 - \|T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi)\|^2) \\
&- \frac{1}{i\varepsilon} \sqrt{\underline{d}^2 - \tau} \cdot \left\{ \langle T_{00}^{[\neq f/2]} \phi, \phi^{[\neq f/2]} \rangle - \langle \phi^{[\neq f/2]}, T_{00}^{[\neq f/2]} \phi \rangle \right\} \quad (\text{aus (62)}) \\
&+ \frac{1}{2i\sqrt{\tau}} \left\{ e^{2i\sqrt{\tau}r} \langle T_{00}^{[f/2]} \phi, \phi^{[f/2]} \rangle - e^{-2i\sqrt{\tau}r} \langle \phi^{[f/2]}, T_{00}^{[f/2]} \phi \rangle \right\} \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|\phi^{[\neq f/2]}\|^2 \\
&+ \frac{1}{i\varepsilon} \sqrt{\underline{d}^2 - \tau} \cdot \left\{ e^{i\varepsilon r/\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \langle T_{00}^{[\neq f/2]} \phi, \phi^{[\neq f/2]} \rangle - e^{-i\varepsilon r/\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \langle \phi^{[\neq f/2]}, T_{00}^{[\neq f/2]} \phi \rangle \right\} \\
&- \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|T_{00}^{[\neq f/2]} \phi\|^2 \\
&- \sum_{\nu > 0} \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu} \phi\|^2 + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ unter der Annahme, dass $T_{00}^{[f/2]}$ bei τ keinen Pol hat

$$\begin{aligned}
\|E^r(\tau, \phi)\|^2 &= r(\|\phi^{[f/2]}\|^2 + \|T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi)\|^2) \\
&- i\sqrt{\tau} \left\{ \left\langle \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\tau} T_{00}^{[f/2]} \phi, T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi) \right\rangle - \left\langle T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi), \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\tau} T_{00}^{[f/2]} \phi \right\rangle \right\} \\
&+ \frac{1}{2i\sqrt{\tau}} \left\{ e^{2i\sqrt{\tau}r} \langle T_{00}^{[f/2]} \phi, \phi^{[f/2]} \rangle - e^{-2i\sqrt{\tau}r} \langle \phi^{[f/2]}, T_{00}^{[f/2]} \phi \rangle \right\} \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|\phi^{[\neq f/2]}\|^2 \\
&+ r \cdot \sqrt{\underline{d}^2 - \tau} \left\{ \langle T_{00}^{[\neq f/2]} \phi, \phi^{[\neq f/2]} \rangle - \langle \phi^{[\neq f/2]}, T_{00}^{[\neq f/2]} \phi \rangle \right\} \\
&- \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 - \tau}} \|T_{00}^{[\neq f/2]} \phi\|^2 \\
&- \sum_{\nu > 0} \frac{1}{2\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} e^{-2r\sqrt{\underline{d}^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu} \phi\|^2
\end{aligned}$$

Aufspalten in Terme mit Fasergrad $f/2$ und andere ergibt so die Behauptung. \square

3.13 Umparametrisierung

Wir betrachten ab jetzt nur $0 < \lambda < \tau_1 = \min\{1/4, \nu_1\}$, wobei ν_1 der kleinste positive Eigenwert von $\Delta_{1,0}$ sei. Dann genügt es, statt Σ_s eine zweifache Überlagerung von \mathbb{C} zu betrachten; siehe Kapitel 3.9.

Sei für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$s = s_{\nu,k}(\lambda) = d_k - i\sqrt{\lambda - \nu - d_k^2},$$

so dass

$$\begin{aligned} \lambda &= s(2d_k - s) \\ e_{\nu}^{\pm}(\lambda, \phi) &= e^{(a_k \pm (d_k - s))r} \phi, \quad \phi \in \Omega^{*,k}(M). \end{aligned}$$

Es gilt für die Bezeichnungen aus (56)

$$\begin{aligned} s_{\nu,k}^+(\lambda_1, \lambda_2) &= i(s_{\nu,k}(\lambda_1) + \overline{s_{\nu,k}(\lambda_2)} - 2d_k) \\ s_{\nu,k}^-(\lambda_1, \lambda_2) &= i(s_{\nu,k}(\lambda_1) - \overline{s_{\nu,k}(\lambda_2)}). \end{aligned}$$

Für $\Lambda \in \text{FP}$ ist $s_{0,k}(\Lambda) = d_k - i\sqrt{\lambda - d_k^2}$ also $\text{Re } s_{0,k} > d_k$.

Aus (59a) wird nun für $\phi, \psi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$

$$\begin{aligned} &(2d_k - \hat{s} - \bar{s})(\hat{s} - \bar{s})(E^r(\hat{s}, \phi), E^r(s, \psi)) \\ &= (\bar{s} - \hat{s})e^{(\hat{s} + \bar{s} - 2d_k)r} \langle \phi, \psi \rangle \\ &\quad + (\hat{s} + \bar{s} - 2d_k) \left\{ e^{(\bar{s} - \hat{s})r} \langle T_{00}(\hat{s}, \phi), \psi \rangle - e^{(\hat{s} - \bar{s})r} \langle \phi, T_{00}(s, \psi) \rangle \right\} \quad (63a) \\ &\quad - \sum_{\nu \geq 0} i s_{\nu}^{-}(\hat{s}, s) e^{i s_{\nu}^{+} r} \langle T_{0\nu}(\hat{s}, \phi), T_{0\nu}(s, \psi) \rangle \end{aligned}$$

und aus (59b) für $\hat{s} \neq \bar{s}$ und $\hat{s} + \bar{s} \neq 2d_k$

$$\begin{aligned} (E^r(\hat{s}, \phi), E^r(s, \psi)) &= \frac{1}{\hat{s} + \bar{s} - 2d_k} e^{(\hat{s} + \bar{s} - 2d_k)r} \langle \phi, \psi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\bar{s} - \hat{s}} \left\{ e^{(\bar{s} - \hat{s})r} \langle T_{00}(\hat{s}, \phi), \psi \rangle - e^{(\hat{s} - \bar{s})r} \langle \phi, T_{00}(s, \psi) \rangle \right\} \\ &\quad - i \sum_{\nu \geq 0; l} \frac{e^{i s_{\nu, l}^{+} r}}{s_{\nu, l}^{+}} \langle T_{0\nu}^{[l]}(\hat{s}, \phi), T_{0\nu}^{[l]}(s, \psi) \rangle \end{aligned} \quad (63b)$$

Gleichungen (48), (51) werden zu

$$dE(s, \psi) = (a_k - d_k + s)E(s, du \wedge \psi) \quad (64)$$

$$E(s, *^M \psi) = *E(s, du \wedge \psi), \quad (65)$$

und aus (52) wird

$$\begin{aligned} (a_k - d_k + s)T_{00}(s, *^M \psi) &= (a_k + d_k - s) *^M T_{00}^{[k]}(s, \psi) \\ &\quad + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^f (a_l + i\sqrt{s(2d_k - s) - d_l^2}) *^M T_{00}^{[l]}(s, \psi). \end{aligned} \quad (66)$$

3.14 Pole von $\mathbf{E}(s)$

Sei U eine in \mathbb{C} offene Umgebung von 0 und $2d_k$, so dass $s(2d_k - s) \in B_t(0)$ für $t < \tau_1 = \min\{1/4, \nu_1\}$.

Satz 3.22. *Sei $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$. Sei $\operatorname{Re}(s) \geq d_k$ und $s \in U$, d.h. s liege in der Zusammenhangskomponente von U , die $2d_k$ enthält. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C(\varepsilon)$, so dass $\|T_{0\nu}^{[l]}(s, \phi)\| < C(\varepsilon)$ für $s \in U \cap \{\operatorname{Re} s \geq d_k, \operatorname{Im} s \geq \varepsilon\}$. Insbesondere können Pole von $E(s, \phi)$ in $U \cap \{\operatorname{Re} s \geq d_k\}$ nur in $(d_k, 2d_k]$ liegen. Die Ordnung eines Pols ist 1. Darüber hinaus ist $T_{00}^{[f/2]}$ holomorph bei $s = 2d_k$.*

Beweis. Betrachte in (63b) $\hat{s} = s$, $\sigma = \operatorname{Re} s \geq d_k$, $\operatorname{Im} s \neq 0$ und $s \in U$. Die linke Seite von (63b) ist ≥ 0 für $\phi = \psi$. Weil $\operatorname{Re}(s) \geq d_k$, also $\lambda = s(2d_k - s) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, ist

$$s_{\nu,l}^+ = 2i \operatorname{Im} \sqrt{\lambda - \nu - d_l^2} \quad \text{wobei} \quad \operatorname{Im} \sqrt{\lambda - \nu - d_l^2} \geq 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \geq 0; l} \frac{ie^{is_{\nu,l}^+ r}}{s_{\nu,l}^+} \|T_{0\nu}^{[l]}(s, \phi)\|^2 &\leq \left| \frac{e^{(s+\bar{s}-2d_k)r}}{s+\bar{s}-2d_k} \right| \|\phi\|^2 + 2 \left| \frac{e^{(\bar{s}-s)r}}{\bar{s}-s} \right| \|T_{00}(s, \phi)\| \|\phi\| \\ &= \frac{e^{2(\sigma-d_k)r}}{2|\sigma-d_k|} \|\phi\|^2 + \frac{1}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\| \|\phi\|. \end{aligned}$$

Sei jetzt $\|\phi\|_{L^2(M, g^M)} = 1$, also

$$\sum_{\nu \geq 0; l} \frac{ie^{is_{\nu,l}^+ r}}{s_{\nu,l}^+} \|T_{0\nu}^{[l]}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{e^{2(\sigma-d_k)r}}{2|\sigma-d_k|} + \frac{1}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\|.$$

Nach Multiplikation mit $e^{-2(\sigma-d_k)r}$ erhalten wir eine Abschätzung der Form

$$\sum_{\nu \geq 0; l} \frac{iC_{\nu,l}}{s_{\nu,l}^+} \|T_{0\nu}^{[l]}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{1}{2|\sigma-d_k|} + \frac{c}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\| \quad (67)$$

mit nicht-negativen Konstanten $c, C_{\nu,l}$, die von r abhängen, aber für $r \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben. Jetzt wird das Verhalten von beiden Seiten von (67) in einer Umgebung von s_0 verglichen.

Wir unterscheiden vier Fälle:

- 1) Sei $\operatorname{Re} s_0 \geq d_k$, $\operatorname{Im} s_0 \neq 0$. Dann ist $(s_{\nu,l}^+)^{-1}$ beschränkt für $s \rightarrow s_0$ und alle (ν, l) ; folglich ist (67) von der Form

$$C \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\|^2 + \sum C_{\nu} \|T_{0\nu}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{c}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\| \quad (68)$$

Sei n die Polordnung von $T_{00}^{[k]}(\cdot, \phi)$ bei s_0 . Für s hinreichend nahe bei s_0 gilt wegen (68)

$$\gamma_1 |s - s_0|^{-2n} \leq \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{c}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}\| \leq \frac{\gamma_2}{|\operatorname{Im} s|} |s - s_0|^{-n} \quad (69)$$

für gewisse positive Konstanten γ_1, γ_2 . Liegt s_0 nicht auf der reellen Achse, so bleibt $\frac{c}{|\operatorname{Im} s|}$ beschränkt für $s \rightarrow s_0$. Es folgt

$$\gamma|s - s_0|^{-2n} \leq |s - s_0|^{-n} \quad =: \quad n \leq 0.$$

Damit ist $T_{00}^{[k]}(\cdot, \phi)$ bei s_0 regulär, und wegen (68) müssen auch alle $T_{0\nu}(\cdot, \phi)$ regulär bei s_0 sein.

- 2) Sei jetzt $\operatorname{Im} s_0 = 0$ mit $d_k < s_0 < 2d_k$, insbesondere $k \neq f/2$. In (67) ist zu beachten, dass für $\tau := s_0(2d_k - s_0)$

$$s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) = 2\sqrt{\tau - \nu - d_l^2} = 0$$

werden kann, falls $\nu + d_l^2 \leq d_k^2$. Wir wählen darum zuerst s_0 so, dass $s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) \neq 0$. Dann zeigt (69) für s nahe bei s_0

$$\gamma|s - s_0|^{-2n} \leq |s - s_0|^{-n-1}, \quad \gamma > 0 \quad =: \quad n \leq 1,$$

die Polordnung von $T_{00}^{[k]}(\cdot, \phi)$ bei s_0 ist also höchstens 1. Hat die linke Seite von (68) bei s_0 einen Pol der Ordnung m , so folgt wie oben $2m \leq n + 1 \leq 2$, also haben die $T_{0\nu}$ eine Singularität höchstens erster Ordnung bei s_0 .

Zu einem s_0 in $(d_k, 2d_k)$ seien jetzt (ν, l) so, dass $s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} s_{\nu,l}^+ &= 2i\operatorname{Im} \sqrt{s(2d_k - s) - \nu - d_l^2} \\ &= 2i\operatorname{Im} \sqrt{-(s - s_0)^2 - 2(s_0 - d_k)(s - s_0)} = O(|s - s_0|^{1/2}) \end{aligned}$$

Für die Polordnung q von $T_{0\nu}^{[l]}(\cdot, \phi)$ bei s_0 bedeutet dies $2q + 1/2 \leq 1$, also $q = 0$. Die entsprechenden Anteile sind also holomorph. Für die Terme mit allen anderen (ν, l) ergibt sich wieder die maximale Polordnung 1 bei s_0 .

- 3) Wir betrachten jetzt $s_0 = 2d_k$ und $d_k > 0$, d.h. $k \neq f/2$.

$$s_{0,f/2}^+ = \sqrt{s(2d_k - s)} + \sqrt{\bar{s}(2d_k - \bar{s})} = O(|s - 2d_k|^{1/2})$$

für $s \rightarrow s_0$. Für alle anderen (ν, l) ist $(s_{\nu,l}^+)^{-1}$ beschränkt für $s \rightarrow s_0$. Somit ist (67) von der Form

$$\begin{aligned} \gamma_1|s - 2d_k|^{-1/2} \|T_{00}^{[f/2]}(s, \phi)\|^2 + C \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\|^2 \\ + \sum C_\nu \|T_{0\nu}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{c}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[k]}(s, \phi)\| \end{aligned}$$

Völlig analog zu 2) folgt, dass $T_{00}^{[k]}$ und $T_{0\nu}^{[l]}$ nur einen Pol erster Ordnung bei s_0 haben können. Hat die Singularität von $T_{00}^{[f/2]}$ bei s_0 die Ordnung q , so folgt wie oben $2q + 1/2 \leq 1$, also $q = 0$.

- 4) Zuletzt sei $s_0 = 0$ für $k = f/2$. Dann ist $|s_{0,f/2}^+| < \gamma|s|$ für s nahe 0. Hier wird also die Abschätzung

$$\gamma_1 |s|^{-1} \|T_{00}^{[f/2]}(s, \phi)\|^2 + \sum C_\nu \|T_{0\nu}(s, \phi)\|^2 \leq \frac{c}{|\operatorname{Im} s|} \|T_{00}^{[f/2]}(s, \phi)\| + \frac{c'}{|s|}$$

betrachtet. Wie in 3) folgt $2q + 1 \leq q + 1$, also wieder $q = 0$. Damit müssen aber auch die $T_{0\nu}$ regulär bei s_0 sein. □

Satz 3.23. *Die Polordnung von $E(\cdot, \phi)$ bei $s_0 \in U$ ist das Maximum der Polordnungen von $T_{0\nu}^{[l]}(\cdot, \phi)$ bei s_0 . Insbesondere hat $E(\cdot, \phi)$ höchstens die Polordnung 1 bei $2d_k$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus (63b) und dem Beweis von Satz 3.22. □

Lemma 3.24. *Sei \bar{s} kein Pol von $E^r(\cdot, \phi)$ und s kein Pol von $E^r(\cdot, \psi)$. Dann ist*

$$\langle T_{00}(\bar{s}, \phi), \psi \rangle = \langle \phi, T_{00}(s, \psi) \rangle$$

Beweis. Unter der Annahme, dass \bar{s} kein Pol von $E^r(\cdot, \phi)$ und s kein Pol von $E^r(\cdot, \psi)$ ist folgt aus (63a) für $\hat{s} = \bar{s}$

$$0 = 2(\bar{s} - 2d_k) \{ \langle T_{00}(\bar{s}, \phi), \psi \rangle - \langle \phi, T_{00}(s, \psi) \rangle \}$$

Wegen Satz 3.23 sind die T_{00} holomorph bei \bar{s} bzw. s und die Behauptung folgt. □

3.15 Residuen

Wir haben gesehen, dass die Pole in einer Umgebung von U von $2d_k$ nur in $U \cap (d_k, 2d_k]$ liegen und von erster Ordnung sind. Sei also $s_0 \in U \cap (d_k, 2d_k]$.

Wir wählen nun zuerst s_0 so, dass $s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) \neq 0$ für alle l, ν . Nach Multiplikation von (63b) mit $(\hat{s} - s_0)(\bar{s} - s_0)$ lassen wir zuerst $s \rightarrow s_0$ und dann $\hat{s} \rightarrow s_0$ konvergieren.

$$\begin{aligned} & (\operatorname{res}_{s_0} E^r(\cdot, \phi), \operatorname{res}_{s_0} E^r(\cdot, \psi)) \\ &= \langle \phi, \operatorname{res}_{s_0} T_{00}(\cdot, \psi) \rangle - i \sum_{\nu \geq 0; l} \frac{e^{is_{\nu,l}^+ r}}{s_{\nu,l}^+} \langle \operatorname{res}_{s_0} T_{0\nu}^{[l]}(\hat{s}, \phi), \operatorname{res}_{s_0} T_{0\nu}^{[l]}(s, \psi) \rangle \\ &= \langle \phi, \operatorname{res}_{s_0} T_{00}(\cdot, \psi) \rangle - \sum_{\nu \geq 0; l} \frac{e^{-2r\sqrt{\nu+d_l^2-\tau}}}{2\sqrt{\nu+d_l^2-\tau}} \langle \operatorname{res}_{s_0} T_{0\nu}^{[l]}(\hat{s}, \phi), \operatorname{res}_{s_0} T_{0\nu}^{[l]}(s, \psi) \rangle \quad (70) \end{aligned}$$

Die Summe konvergiert für $r \rightarrow \infty$ gegen 0.

Für $s_0 = 2d_k$, also $\tau = 0$ ist jedoch

$$s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) = 0 \iff (\nu = 0 \wedge l = f/2).$$

Sei zuerst $d_k > 0$.

$$\begin{aligned} & \lim_{\hat{s} \rightarrow 2d_k} \lim_{s \rightarrow 2d_k} \frac{e^{is_{0,f/2}^+(\hat{s},s)r}}{s_{0,f/2}^+(\hat{s},s)} \langle (\hat{s} - 2d_k)T_{00}^{[f/2]}(\hat{s}, \phi), (s - 2d_k)T_{00}^{[f/2]}(s, \psi) \rangle \\ &= \lim_{\hat{s} \rightarrow 2d_k} \frac{e^{i\sqrt{\hat{s}(2d_k - \hat{s})}r}}{\sqrt{\hat{s}(2d_k - \hat{s})}} \langle (\hat{s} - 2d_k)T_{00}^{[f/2]}(\hat{s}, \phi), \text{res}_{2d_k} T_{00}^{[f/2]}(\psi) \rangle = 0, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile verwendet wurde, dass $T_{00}^{[f/2]}$ holomorph bei $2d_k$ ist. Entsprechend für $d_k = 0$, also $\psi \in \mathcal{H}^{*,f/2}(M)$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\hat{s} \rightarrow 0} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^{is_{0,f/2}^+(\hat{s},s)r}}{s_{0,f/2}^+(\hat{s},s)} \langle \hat{s}T_{00}^{[f/2]}(\hat{s}, \phi), sT_{00}^{[f/2]}(s, \psi) \rangle \\ &= \lim_{\hat{s} \rightarrow 0} \frac{e^{\hat{s}r}}{\hat{s}} \langle \hat{s}T_{00}^{[f/2]}(\hat{s}, \phi), \text{res}_0 T_{00}^{[f/2]}(\psi) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Grenzwerte erhalten wir schließlich

Satz 3.25. *Sei $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$. Sei $s_0 = 2d_k$, oder $s_0 \in U \cap (d_k, 2d_k)$, so dass $s_{\nu,l}^+(\tau, \tau) \neq 0$ für alle l, ν . Dann ist $\text{res}_{s_0} E(\cdot, \phi) \in L^2\Omega^*(X)$ und*

$$(\text{res}_{s_0} E(\cdot, \phi), \text{res}_{s_0} E(\cdot, \psi)) = \langle \phi, \text{res}_{s_0} T_{00}(\cdot, \psi) \rangle = \langle \text{res}_{s_0} T_{00}(\cdot, \phi), \psi \rangle.$$

Von besonderem Interesse sind die Residuen bei $2d_k$. Wir verwenden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\phi) &:= \text{res}_{2d_k} T_{00}(\cdot, \phi), \\ \tilde{E}(\phi) &:= \text{res}_{2d_k} E(\cdot, \phi). \end{aligned}$$

Korollar 3.26.

$$\tilde{C}^{[k]} = (\tilde{C}^{[k]})^*, \quad \tilde{C}^{[k]} \geq 0$$

und $\mathcal{H}^{*,k}(M)$ zerfällt in die orthogonale direkte Summe

$$\mathcal{H}^{*,k}(M) = \ker \tilde{C}^{[k]} \oplus \text{im } \tilde{C}^{[k]}$$

Korollar 3.27. *Sei $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$.*

$$E(s, \phi) \text{ ist holomorph bei } s = 2d_k \iff \phi \in \ker \tilde{C}^{[k]} \iff \phi \in \ker \tilde{C}$$

Beweis. Sei $\phi \in \ker \tilde{C}^{[k]}$. Satz 3.25 ergibt

$$\|\tilde{E}(\phi)\|^2 = \langle \tilde{C}^{[k]}(\phi), \phi \rangle = 0: \tilde{E}(\phi) = 0.$$

Ist umgekehrt $\tilde{E}(\phi) = 0$ so folgt aus Satz 3.23, dass $T_{00}(\cdot, \phi)$ holomorph bei $2d_k$ ist. □

Satz 3.28. Für $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$ sind die Residuen von $E(s, \phi)$ und von $E(s, du \wedge \phi)$ bei $s = 2d_k$ in $L^2\Omega^*(X)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.25 und $E(s, *^M\psi) = *E(s, du \wedge \psi)$. □

Insbesondere sind die Residuen geschlossen, denn

$$\|d\tilde{E}\|^2 + \|\delta\tilde{E}\|^2 = (\Delta\tilde{E}, \tilde{E}) = 0.$$

Es gibt also eine Abbildung

$$\mathcal{H}_{(2)}^p(X) \rightarrow H^p(X), \quad \tilde{E} \mapsto [\tilde{E}].$$

4 Theorem vom Hodge–Typ

Für eine kompakte Mannigfaltigkeit M gilt bekanntlich $\mathcal{H}^p(M) \simeq H^p(M)$. Für eine nicht-kompakte Mannigfaltigkeit X ist eine glatte Lösung ϕ von $\Delta_X \phi = 0$ im Allgemeinen nicht geschlossen, repräsentiert also keine Klasse in $H^p(X)$. Jedoch sind glatte, L^2 –harmonische Formen immer noch Repräsentanten in $H^p(X)$.

Ziel dieses Kapitels ist es, harmonische Repräsentanten von $H^p(X)$ zu finden, insbesondere auch solche, die nicht in $L^2\Omega^p(X)$ liegen. Dabei wird wie in G. Harders Arbeit [Har] vorgegangen.

Wenn eine verallgemeinerte Eigenform $E(\cdot, \phi), \phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$ bei $s = 2d_k$ keinen Pol hat, ist sie eine nicht-quadratintegrierbare Lösung von $\Delta E = 0$. Dann muss noch untersucht werden, unter welchen Bedingungen $E(2d_k, \phi)$ geschlossen ist. Liegt andernfalls bei $2d_k$ ein Pol, so betrachten wir das Residuum $\tilde{E}(\phi)$. Dieses ist nach Satz 3.28 eine geschlossene L^2 –harmonische Form, also Repräsentant in $H^p(X)$ und $H_{(2)}^p(X)$.

Wie immer wird die Gültigkeit von (A) und (B) aus Kapitel 3.7 vorausgesetzt.

4.1 Der Fall $k \neq f/2$

Satz 4.1. *Sei $k > f/2$ und $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$. Dann ist $E(\cdot, \phi)$ holomorph bei $s = 2d_k$. $E(2d_k, \phi)$ ist geschlossen $\Leftrightarrow: \tilde{C}^{[f-k]}(*^M \phi) = 0$.*

Sei $k < f/2$ und $\phi \in \mathcal{H}^{,k}(M)$. Dann ist $E(\cdot, \phi)$ holomorph bei $s = 2d_k$ genau dann, wenn $\phi \in \ker \tilde{C}^{[k]}$.*

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$. Für $k > f/2$, also $a_k < 0$, betrachten wir in (66) nur den Anteil vom Fasergrad $f - k$:

$$(2d_k - s)T_{00}^{[f-k]}(s, *^M \phi) = s *^M T_{00}^{[k]}(s, \phi). \quad (71)$$

Wenn also $T_{00}^{[f-k]}(s, *^M \phi)$ bei $2d_k$ eine Singularität der Ordnung n hat, so hat $T_{00}^{[k]}(s, \phi)$ dort eine Singularität der Ordnung $n - 1$. Nun ist die Polordnung bei $2d_k$ wegen Satz 3.23 aber maximal 1, also ist $T_{00}^{[k]}(s, \psi)$ holomorph bei $s = 2d_k$. Aus Korollar 3.27 folgt, dass $E(s, \phi)$ holomorph bei $2d_k$ ist. Gleichungen (64) und (65) ergeben

$$\begin{aligned} dE(s, \phi) &= (a_k - d_k + s)E(s, du \wedge \phi) \\ &= (-2d_k + s)E(s, du \wedge \phi) = \pm(-2d_k + s) * E(s, *^M \phi). \end{aligned}$$

Damit ist $E(2d_k, \phi)$ genau dann geschlossen, wenn $E(\cdot, *^M \phi)$ holomorph bei $2d_k$ ist. Aber nach Korollar 3.26 ist

$$\mathcal{H}^{*,f-k}(M) = \ker \tilde{C}_{2d_k}^{f-k} \oplus \text{im } \tilde{C}_{2d_k}^{f-k}$$

und Korollar 3.27 beweist die übrigen Aussagen. □

Satz 4.2. Für $k < f/2$ ist $E(s, du \wedge \phi)$ holomorph und exakt bei $s = 2d_k$. Für $k > f/2$ ist $\tilde{E}(du \wedge \phi) = dE(2d_k, \phi)$.

Insbesondere sind $E(2d_k, du \wedge \psi), \tilde{E}(du \wedge \phi)$ sämtlich $= 0 \in H_{dR}^*(X)$.

Beweis. Sei $k < f/2$ und $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$. In Gleichung (65),

$$E(s, *^M \phi) = *E(s, du \wedge \phi),$$

ist die linke Seite holomorph bei $s = 2d_k$. Es folgt für die Residuen $\tilde{E}(du \wedge \phi) = 0$, so dass $E(., du \wedge \phi)$ holomorph bei $2d_k$ ist.

Zur Exaktheit verwenden wir (64):

$$E(2d_k, du \wedge \phi) = \frac{1}{2d_k} dE(2d_k, \phi).$$

Ist hingegen $\phi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$ für $k > f/2$, so folgt aus (64)

$$dE(s, \phi) = (s - 2d_k)E(s, du \wedge \phi),$$

und so die zweite Aussage im Grenzwert $s \rightarrow 2d_k$. □

4.2 Der Fall $k = f/2$

Sei $\phi \in \mathcal{H}^{*,f/2}(M)$. Wegen Satz 3.22 ist $T_{00}^{[f/2]}(s, \phi)$ holomorph in $s = 0$. Die Funktionalgleichung (55)

$$T_{00}^{[k]}(s, T_{00}^{[k]}(2d_k - s, \psi)) = \psi \in \mathcal{H}^{*,k}(M)$$

impliziert hier

$$T_{00}^{[f/2]}(0, T_{00}^{[f/2]}(0, \phi)) = \phi \in \mathcal{H}^{*,f/2}(M).$$

Außerdem zeigt Lemma 3.24, dass $(T_{00}^{[f/2]})^* = T_{00}^{[f/2]}$.

Damit gibt es für $p \geq f/2$ eine Zerlegung von $\mathcal{H}^{*,f/2}(M)$ in die orthogonale direkte Summe

$$\mathcal{H}^{p-f/2, f/2}(M) = \mathcal{H}_+^p \oplus \mathcal{H}_-^p \tag{72}$$

mit

$$\mathcal{H}_\pm^p = \{\phi \in \mathcal{H}^{p-f/2, f/2}(M) \mid T_{00}^{[f/2]}(0, \phi) = \pm \phi\}.$$

Der Hodge-Isomorphismus $\mathcal{H}^p(M) \rightarrow H^p(M)$ liefert eine entsprechende Zerlegung

$$H^{p-f/2}(B, \mathcal{H}^{f/2}) =: H^{p-f/2, f/2}(M) = \mathcal{H}_+^p(M) \oplus \mathcal{H}_-^p(M).$$

Lemma 4.3. Der Hodge-Stern-Operator

$$*^M : \mathcal{H}_\pm^p \rightarrow \mathcal{H}_\mp^{n-p}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Dies folgt aus der Funktionalgleichung (66),

$$T_{00}^{[f/2]}(s, *^M \phi) = - *^M T_{00}^{[f/2]}(s, \phi).$$

□

Satz 4.4. Für $\phi \in \mathcal{H}^{*,f/2}(M)$ ist $E(s, \phi)$ holomorph und geschlossen bei $s = 0$. $E(s, du \wedge \phi)$ ist holomorph bei 0.

Beweis. Die Holomorphie folgt aus Satz 3.22 und 3.25.

Wegen (65) ist auch $E(s, du \wedge \phi)$ holomorph bei $s = 0$ und (64) impliziert dann $dE(s, \phi) = 0$. □

Satz 4.5. Für $\phi \in \mathcal{H}_-$ ist $E(0, \phi) = 0$. Für $\phi \in \mathcal{H}_+$ ist $E(0, du \wedge \phi) = 0$.

Beweis. Nach Satz 3.21 gilt für reelles τ nahe bei 0

$$\begin{aligned} \|E^r(\tau, \phi)\|^2 &= r(\|\phi\|^2 + \|T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi)\|^2) \\ &\quad - i\sqrt{\tau} \left\{ \left\langle \frac{d}{d\lambda} |_{\tau} T_{00}^{[f/2]}(\cdot, \phi), T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi) \right\rangle - \left\langle T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi), \frac{d}{d\lambda} |_{\tau} T_{00}^{[f/2]}(\cdot, \phi) \right\rangle \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2i\sqrt{\tau}} \left\{ e^{2i\sqrt{\tau}r} \langle T_{00}(\tau, \phi), \phi \rangle - e^{-2i\sqrt{\tau}r} \langle \phi, T_{00}(\tau, \phi) \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{l=0}^f \sum_{\nu \geq 0} \frac{e^{-2r\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}}}{2\sqrt{d_l^2 + \nu - \tau}} \|T_{0\nu}^{[l]}(\tau, \phi)\|^2 \quad (73) \end{aligned}$$

Weil $T_{00}^{[f/2]}(\tau, \phi)$ regulär bei $\tau = 0$ ist und $\|\phi\|^2 = \|T_{00}^{[f/2]}(0, \phi)\|^2$, folgt für $\tau \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \|E^r(0, \phi)\|^2 &= 2r \cdot \|\phi\|^2 + r \left\{ \langle T_{00}^{[f/2]}(0, \phi), \phi \rangle + \langle \phi, T_{00}^{[f/2]}(0, \phi) \rangle \right\} \\ &\quad - \sum_{l=0}^f \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ (\nu, l) \neq (0, f/2)}} \frac{e^{-2r\sqrt{d_l^2 + \nu}}}{2\sqrt{d_l^2 + \nu}} \|T_{0\nu}^{[l]}(0, \phi)\|^2 \end{aligned}$$

Ist jetzt $\phi \in \mathcal{H}_-$, so folgt

$$\|E^r(0, \phi)\|^2 = - \sum_{l=0}^f \sum_{\substack{\nu \geq 0 \\ (\nu, l) \neq (0, f/2)}} \frac{e^{-2r\sqrt{d_l^2 + \nu}}}{2\sqrt{d_l^2 + \nu}} \|T_{0\nu}^{[l]}(0, \phi)\|^2$$

Für $r \rightarrow \infty$ geht die Summe gegen 0, und die erste Behauptung folgt.

Sei jetzt $\phi \in \mathcal{H}_+ =: *^M \phi \in \mathcal{H}_-$. Die zweite Aussage ergibt sich dann aus

$$E(s, du \wedge \phi) = \pm * E(s, *^M \phi) = 0.$$

□

4.3 Ein Theorem vom Hodge-Typ

Mit Hilfe der verallgemeinerten Eigenformen werden Klassen in $H^p(M)$ zu Klassen in $H^p(X)$ erweitert.

Sei $\phi \in \mathcal{H}^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F))$. Wir haben gesehen, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{p-k}(B, \mathcal{H}^k(F)) &= \ker \tilde{C}^{[k]} \oplus \text{im } \tilde{C}^{[k]}, & k < \frac{f}{2} \\ \mathcal{H}^{p-f/2}(B, \mathcal{H}^{f/2}(F)) &= \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-\end{aligned}$$

Wir definieren eine Abbildung $\Xi : \mathcal{H}^p(M) \rightarrow \Omega^p(X)$ durch

$$\Xi(\phi) = \begin{cases} \tilde{E}(\phi), & k < f/2 \quad \text{und} \quad \phi \in \text{im } \tilde{C}^{[k]} \\ E(0, \phi), & k = f/2 \quad \text{und} \quad \phi \in \mathcal{H}_+ \\ E(2d_k, \phi), & k > f/2 \quad \text{und} \quad *^M \phi \in \ker \tilde{C}^{[f-k]} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und lineare Fortsetzung nach $\mathcal{H}^p(M)$.

Aus den Sätzen 3.28, 4.1 und 4.4 folgt, dass $\Xi(\phi)$ eine geschlossene harmonische Differentialform ist, also Repräsentant einer Klasse in $H^p(X)$.

Definition 4.6. Die Formen in $\Xi(\phi)$ heißen *singuläre Werte*.

Die Erweiterungsabbildung $\Xi : H^p(M) \rightarrow H^p(X)$ ist jetzt definiert durch

$$\Xi([\phi]) = [\Xi(\phi)], \quad \phi \in \mathcal{H}^p(M). \quad (74)$$

Im Weiteren sollen umgekehrt die Einschränkungen der Kohomologieklassen von singulären Werten auf den „Rand“ M betrachtet werden. Genauer betrachten wir $Y_s = \{s\} \times M \subset Z$ für ein $s > 0$ und identifizieren Y_s mit M . Sei $r_s = i_s^* : H^p(X) \rightarrow H^p(Y_s)$ mit $i_s : Y_s \hookrightarrow X$ und $[\theta] \in H^p(X)$. Wir zeigen jetzt, dass die Klasse $[i_s^*\theta] \in H^p(M)$ unabhängig von s ist. Sei dazu γ ein Zykel in M und γ_s, γ_t die entsprechenden Zykel in Y_s bzw. Y_t . Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_{\gamma_s} i_s^*\theta - \int_{\gamma_t} i_t^*\theta = \int_{\partial([s,t] \times \gamma)} \theta = \int_{[s,t] \times \gamma} d\theta = 0. \quad (75)$$

Das Theorem von de Rham besagt nun, dass die von $\Psi(\theta)(\gamma) = \int_\gamma \theta$ induzierte Abbildung $\Psi^* : H^p(M) \rightarrow H_{\text{sing}}^p(M)$ ein Isomorphismus ist, und die Behauptung folgt.

Deshalb fixieren wir im Folgenden ein $s > 0$ und definieren $r = i_s^* : H^p(X) \rightarrow H^p(M)$.

Lemma 4.7. Sei $\theta \in \Omega^*(X)$ eine geschlossene Form, deren Einschränkung auf Z schnell fallend (für $u \rightarrow \infty$) ist. Dann gilt $r([\theta]) = 0$.

Sei $\theta \in \Omega^p(X)$ eine geschlossene Form mit $\Pi_0(\theta \upharpoonright Z) = 0$. Dann ist $r[\theta] = 0$.

Beweis. Weil $i_t^* \theta$ für $t \rightarrow \infty$ schnell fallend ist, folgt aus (75)

$$\int_{\gamma} i^* \theta = 0,$$

und so mit dem Theorem von de Rham, dass $r[\theta] = 0 \in H^p(M)$.

Sei jetzt $\Pi_0(\theta \upharpoonright Z) = 0$. Insbesondere gilt dann für ein $u > 1$

$$\theta \upharpoonright (\{u\} \times M) \perp \Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F)) \quad =: \quad \theta \upharpoonright (\{u\} \times M) \perp \mathcal{H}^*(M).$$

Also ist $[i_u^* \theta] = 0 \in H^p(M)$, und wir haben oben gesehen, dass diese Klasse unabhängig von der Wahl von u ist. \square

Insbesondere ist $r[E] = r[\Pi_0 E]$ falls E geschlossen ist, sowie $r[\tilde{E}] = r[\Pi_0 \tilde{E}]$.

Aus der asymptotischen Entwicklung (53) von E folgt für $k > f/2$

$$\Pi_0 E(2d_k, \phi) = \phi + \sum_{l \leq f/2} T_{00}^{[l]}(2d_k, \phi) + \sum_{l > f/2} e^{-2d_l u} T_{00}^{[l]}(2d_k, \phi) + \theta$$

mit schnell fallendem θ .

Mit Lemma 4.7 also

$$r[\Xi[\phi]] = r[E(2d_k, \phi)] = [\phi] + \sum_{l \leq f/2} [T_{00}^{[l]}(2d_k, \phi)].$$

Nun besagt aber (71)

$$\tilde{C}^{[f-k]}(*^M \phi) = -2d_k *^M T_{00}^{[k]}(2d_k, \phi).$$

Die Bedingung $*^M \phi \in \ker \tilde{C}^{[f-k]}$ aus (74) impliziert also

$$r[\Xi[\phi]] = r[E(2d_k, \phi)] = [\phi] + \sum_{\substack{l \leq f/2 \\ l \neq k}} [T_{00}^{[l]}(2d_k, \phi)]. \quad (76a)$$

Entsprechend für $k = f/2$, $\phi \in \mathcal{H}_+$

$$r[\Xi[\phi]] = r[E(0, \phi)] = 2[\phi] + \sum_{l < f/2} [T_{00}^{[l]}(2d_k, \phi)]. \quad (76b)$$

Schließlich für $k < f/2$

$$\Pi_0 \tilde{E}(2d_k, \phi) = \sum_{l < f/2} \tilde{C}^{[l]}(2d_k, \phi) + \sum_{l > f/2} e^{-2d_l u} \tilde{C}^{[l]}(2d_k, \phi) + \tilde{\theta},$$

wobei verwendet wurde, dass $T_{00}^{[f/2]}$ laut Satz 3.22 holomorph ist. Somit für $k < f/2$

$$r[\Xi[\phi]] = r[\tilde{E}(2d_k, \phi)] = \left[\sum_{l < f/2} \tilde{C}^{[l]}(2d_k, \phi) \right] \quad (76c)$$

Folgendes Theorem ist das Hauptergebnis dieser Arbeit.

Theorem 4.8. Sei $H_!^p(X) = \text{im}(H_c^p(X) \rightarrow H^p(X))$ das Bild der Kohomologie mit kompaktem Träger in der de Rham-Kohomologie. Sei $H_{inf}^p(X)$ ein zu $H_!^p(X)$ in $H^p(X)$ komplementärer Raum. In der direkten Summe

$$H^p(X) = H_!^p(X) \oplus H_{inf}^p(X)$$

ist $H_{inf}^p(X)$ isomorph zu $\text{im } r$.

Eingeschränkt auf $\text{im } r$ ist $r \circ \Xi$ ein Isomorphismus

$$r \circ \Xi : r(H^p(X)) \rightarrow r(H^p(X)).$$

Beweis. Nach Definition der relativen de Rham-Kohomologie ist $\ker r = \text{im}(H^p(X, M) \rightarrow H^p(X))$ und bekanntlich gilt $H_c^p(X) = H^p(X, M)$. Zu zeigen ist also nur die Isomorphie von $r \circ \Xi$. Sei

$$\mathfrak{K} = \bigoplus_{k=0}^f \mathcal{A}^{(p-k, k)} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}^{(p-k, k)} := \begin{cases} \text{im } \tilde{C}^{[k]}, & k < f/2 \\ \mathcal{H}_+^p, & k = f/2 \\ *^M \ker \tilde{C}^{[f-k]}, & f/2 < k \leq \min\{f, p\} \\ 0, & k > \min\{f, p\} \end{cases}$$

Zuerst zeigen wir, dass $r \circ \Xi$ injektiv auf \mathfrak{K} ist.

Sei $\phi \in \mathcal{H}^{p-k, k}(M)$ und $r(\Xi([\phi])) = 0$. Sei zuerst $k \geq f/2$. Aus (76a) und (76b) folgt $[\phi] = 0$. Ist hingegen $k < f/2$ und $[\phi] \in \text{im } \tilde{C}^{[k]}$ so besagt (76c)

$$r(\Xi([\phi])) = 0 =: \tilde{C}^{[k]}(2d_k, \phi) = 0.$$

Aber $\phi = \tilde{C}^{[k]}(\psi)$ für ein $\psi \in \mathcal{H}^p(M)$. Korollar 3.26 ergibt

$$\|\phi\|^2 = \|\tilde{C}^{[k]}\psi\|^2 = (\tilde{C}^{[k]}\phi, \psi) = 0$$

und schließlich $\phi = 0$.

Sei $R^{(j, k)} = \text{im}(r^{(j, k)} : H^{j+k}(X) \rightarrow H^j(B, \mathcal{H}^k(F)))$ das Bild der Einschränkungsbildung r , projiziert auf $H^j(B, \mathcal{H}^k(F))$, sowie $R^p = \text{im}(r : H^p(X) \rightarrow H^p(M))$. Durch

$$q([\phi], [\psi]) = \int_M \phi \wedge \psi$$

ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform $q : H^p(M) \times H^{n-p}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dies ist auch eine Bilinearform $q : H^{(a, k)}(M) \times H^{(n-a-f, f-k)}(M)$. Die Wohldefiniertheit von q folgt aus

$$\begin{aligned} \int_M (\phi + d\theta) \wedge \psi &= \int_M \phi \wedge \psi + \int_M d(\theta \wedge \psi) \pm \int_M \theta \wedge d\psi \\ &= \int_M \phi \wedge \psi + \int_{\partial M} \theta \wedge \psi = \int_M \phi \wedge \psi \end{aligned}$$

denn $\partial M = \emptyset$ und ψ, ϕ sind geschlossen. q ist nicht-ausgeartet: Schreibe nach Hodge $\psi = \psi_0 + d\psi_1$ mit Δ^M -harmonischen ψ_0 . Wenn für alle $[\phi]$ gilt $q([\phi], [\psi]) = 0$, so ist

insbesondere $q([\ast^M \psi_0], [\psi]) = q([\ast^M \psi_0], [\psi_0]) = 0$. Aber $(\ast^M \psi_0) \wedge \psi_0 = \|\psi_0\|^2 \text{vol}_M \geq 0$, und schließlich $\psi_0 = 0$, d.h. $[\psi] = 0$.

Weiter sind $R^{(a,k)}$ und $R^{(n-f-a, f-k)}$ orthogonal bezüglich q . Ist nämlich $[v] \in R^p$, $[w] \in R^{n-p}$, so gibt es geschlossene $\psi \in \Omega^p(X)$, $\phi \in \Omega^{n-p}(X)$ mit $[v] = r[\psi] = [i^* \psi]$, $[w] = [i^* \phi]$. Mit Stokes

$$\int_{M=\partial X} i^* \psi \wedge i^* \phi = \int_M i^*(\psi \wedge \phi) = \int_{X \setminus Z} d(\psi \wedge \phi) = 0.$$

Gleichungen (76a), (76b) und (76c) zeigen jeweils

$$(r^{(p-k,k)} \circ \Xi)(\mathcal{A}^{(p-k,k)}) \subset \mathcal{A}^{(p-k,k)},$$

womit auch $r \circ \Xi(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}$.

Wir behaupten schließlich

$$R^{(*,k)} = \mathcal{A}^{(*,k)}. \quad (77)$$

Dies impliziert $R^p = \mathfrak{K}$ und somit, dass $r \circ \Xi : R^p \rightarrow R^p$ ein Isomorphismus ist.

Sei $k < f/2$ und $[v] \in R^{(j,k)}$ mit $v \in \mathcal{H}^{j,k}(M)$. Wegen Korollar 3.26 gibt es eine Zerlegung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in \ker \tilde{C}^{[k]}$, $v_2 \in \text{im } \tilde{C}^{[k]}$. Wir zeigen $v_1 = 0$; dann ist $R^{(j,k)} = \text{im } \tilde{C}^{[k]}$. Wegen (76a)

$$R^{(n-f-j, f-k)} \ni (r^{n-f-j, f-k} \circ \Xi)([\ast^M v_1]) = [\ast^M v_1].$$

Es folgt $[\ast^M v_1] \perp_q [v_1]$ und so $0 = q([\ast^M v_1], [v_1]) = \int_M \|v_1\|^2 \text{vol}_M$, also $v_1 = 0$.

Das gleiche Argument zeigt $R^{(j,k)} = \ast^M \ker \tilde{C}^{[f-k]}$ für $k > f/2$.

Sei jetzt $k = f/2$. Wegen (76b) und (72)

$$H_+^{(j, f/2)} \subset R^{(j, f/2)} \subset H^{(j, f/2)} = H_+^{(j, f/2)} \oplus H_-^{(j, f/2)}$$

Nach Lemma 4.3 ist $\ast^M : \mathcal{H}_-^{(j, f/2)} \rightarrow \mathcal{H}_+^{(n-j-f, f/2)}$ ein Isomorphismus. Sei $[v] \in R^{(j, f/2)}$ im orthogonalen Komplement von $H_+^{(j, f/2)}$. Damit ist

$$[v] \in H_-^{(j, f/2)} : [\ast^M v] \in H_+^{(n-j-f, f/2)} \subset R^{(n-j-f, f/2)} : [\ast^M v] \perp_q R^{(j, f/2)}$$

Es folgt wieder $[v] = 0$ und so

$$H_+^{(j, f/2)}(M) = R^{(j, f/2)}.$$

Damit ist (77) gezeigt und das Theorem bewiesen. \square

Korollar 4.9. *Jede Klasse in $H_{\text{inf}}^p(X)$ besitzt Repräsentanten in singulären Werten. Jede Klasse in $H^p(X)$ besitzt einen harmonischen Repräsentanten.*

Beweis. Seien $H_s^p = \Xi(H^p(M))$ die singulären Werte. Sicher ist $H_s^p \supset \Xi(r(H^p(X)))$, also auch

$$r(H_s^p) \supset r \circ \Xi(r(H^p(X))) \cong r(H^p(X))$$

Weil andererseits $r(H_s^p) \subset r(H^p(X))$, ist $r : H_s^p \rightarrow r(H^p(X))$ surjektiv. Weil $r : H_{\text{inf}}^p(X) \rightarrow r(H^p(X))$ ein Isomorphismus ist, induziert dies eine surjektive Abbildung $H_s^p \rightarrow H_{\text{inf}}^p(X)$.

Singuläre Werte sind harmonisch. Eine Klasse in $H_1^p(X)$ ist quadratintegrierbar, und nach Kodaira besitzt sie einen L^2 -harmonischen Repräsentanten. Dies beweist die zweite Aussage. \square

Bemerkung 4.10. Der Beweis von Theorem 4.8 zeigt sogar $H_s \cong H_{\text{inf}}$, denn $\Xi(R^p) = \Xi(H(M))$. \diamond

Die Klassen in $H_{\text{inf}}^p(X)$ sind im Allgemeinen nicht in $L^2\Omega^p(X)$, es sein denn, sie werden von Residuen repräsentiert.

Die Klassen in $H_1^p(X)$ liegen in $L^2\Omega^p(X)$. Wegen Lemma 4.7 sind geschlossene Spitzenformen in $\ker r$. Es gibt also eine weitere Zerlegung

$$H_1^p(X) = H_0^p(X) \oplus H_{\text{Eis}}^p(X)$$

Dabei sind die harmonischen Repräsentanten in $H_0^p(X)$ auf Z schnell fallend, und orthogonal zu den faserharmonischen Formen. In [Har2, §2] zeigt G. Harder, dass $H_{\text{Eis}}^p(X)$ im Allgemeinen nicht leer ist.

Die Volumenform vol_X ist aus Gradgründen geschlossen. Eingeschränkt auf Z ist

$$\text{vol}_X \upharpoonright Z = \text{vol}_Z = du \wedge \pi^* \text{vol}_B \wedge e^{-f u} \text{vol}_{F_b}.$$

Weil ∇^{F_b} mit der vertikalen Metrik g^{F_b} verträglich ist, gilt $\nabla^{F_b} \text{vol}_{F_b} = 0$. Aus den Formeln

$$\delta^{F_b} = - \sum_i U_i \lrcorner \nabla_{U_i}^{F_b}, \quad d^{F_b} = \sum_i (-1)^i U_i^\vee \wedge \nabla_{U_i}^{F_b}$$

folgt so $\delta^{F_b} \text{vol}_{F_b} = 0 = d^{F_b} \text{vol}_{F_b}$, so dass vol_X eine faserharmonische Form ist. Damit ist vol_X ein möglicher Repräsentant in H_{Eis} . Allerdings ist aufgrund der Poincaré-Dualität $H^N(X) = H_c^0(X) = 0$, so dass auch $[\text{vol}_X] = 0$.

4.3.1 Zur Signatur

Als eine Anwendung von Theorem 4.8 soll die L^2 -Signatur von X berechnet werden. Sei $N = \dim X = 4l$.

$L^2 - \text{sign}(X)$ ist die Signatur bezüglich reduzierter L^2 -Kohomologie. Diese ist kanonisch isomorph zu den L^2 -harmonischen Formen $\mathcal{H}_{(2)}(X)$ auf X . Damit ist $L^2 - \text{sign}(X)$ auch die Signatur der quadratischen Form

$$Q(\phi, \psi) = \int_X \phi \wedge \psi, \quad \phi, \psi \in \mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X)$$

Entsprechend sei $\text{sign}_c(X) = \text{sign}(X_0, \partial X_0)$ die Signatur von Q auf $H_1(X)$. Jede Klasse in $H_1(X)$ hat einen L^2 -harmonischen Repräsentanten. Sei $\mathcal{H}_1(X)$ der Raum aller L^2 -harmonischen Repräsentanten von $H_1(X)$. Definiere schließlich $\text{sign}_1(X)$ als die Signatur von Q auf $\mathcal{H}_1^{2l}(X)$.

Satz 4.11. *Unter den Voraussetzungen (A) und (B) gilt für die Mannigfaltigkeit X mit gefaserner Spitzenmetrik*

$$L^2 - \text{sign}(X) = \text{sign}_1(X)$$

Bemerkung 4.12. Wenn gezeigt werden könnte, dass die Formen in $\mathcal{H}_1(X)$ schnell fallend sind, so könnte wie bei [APS] gefolgert werden, dass $\mathcal{H}_1 \rightarrow H_1$ injektiv ist. Dies wiederum würde zeigen, dass $\text{sign}_1(X) = \text{sign}(X_0, \partial X_0)$. Dai und Vaillant zeigen

$$L^2 - \text{sign}(X) = \text{sign}(X_0, \partial X_0) + \tau$$

wobei τ eine topologische Invariante der Spektralsequenz von $M \rightarrow B$ ist. Unter den Voraussetzungen (A) und (B) kann wie bei Dai gezeigt werden, dass $\tau = 0$. Hier soll stattdessen die Differenz der betrachteten Signaturen direkt berechnet werden. \diamond

Beweis. Durch

$$\tau_X \psi := i^{p(p-1)+2l} * \psi, \quad \psi \in \mathcal{H}_{(2)}^p(X)$$

wird eine Involution $\tau_X : \mathcal{H}_{(2)}^p(X) \rightarrow \mathcal{H}_{(2)}^{N-p}(X)$ definiert.

Seien $\mathcal{H}_{\pm}^{2l}(X)$ die ± 1 -Eigenräume von $\tau_X = * : \mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X) \rightarrow \mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X)$. Weil $Q(\phi, * \phi) = \|\phi\|_{L^2}^2$ für $\phi \in \mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X)$, folgt dass $\mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X)$ in die orthogonale direkte Summe

$$\mathcal{H}_{(2)}^{2l}(X) = \mathcal{H}_+^{2l}(X) \oplus_Q \mathcal{H}_-^{2l}(X)$$

zerfällt, und Q ist auf $\mathcal{H}_+^{2l}(X)$ bzw. $\mathcal{H}_-^{2l}(X)$ positiv bzw. negativ definit. Nach dem Sylvesterschen Trägheitssatz ist also

$$L^2 - \text{sign}(X) = \dim \mathcal{H}_+^{2l}(X) - \dim \mathcal{H}_-^{2l}(X).$$

Sei

$$\hat{\mathcal{H}}^p(Z) = \mathcal{H}^p(M) \oplus du \wedge *^M \mathcal{H}^p(M).$$

Definiere $\tau_Z \psi := i^{p(p-1)+2l} *^Z \psi$ für dem Hodge-Stern-Operator $*^Z$ auf $Z = \mathbb{R}^+ \times M$ mit der Metrik $du^2 + g^M$. Für $\omega \in \hat{\mathcal{H}}^p(Z)$ wird durch

$$\tilde{E}(\omega) = \text{res}_{s=2d(\omega)} E(s, \omega)$$

eine L^2 -harmonische Form definiert.

Lemma 4.13. *Es ist*

$$\tau_X \tilde{E}(\omega) = \tilde{E}(\tau_Z \omega) \tag{78}$$

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{H}^{p-k, k}(M)$ mit $k < f/2$, $\phi \in \text{im } \tilde{C}^{[k]}$.

$$dE(s, *^M \phi) = (s - 2d_k)E(s, du \wedge *^M \phi) = (s - 2d_k) *^2 (*^M)^2 * E(s, \phi)$$

Für $s \rightarrow 2d_k$:

$$dE(2d_k, *^M \phi) = \tilde{E}(du \wedge *^M \phi) = (-1)^p * \tilde{E}(\phi),$$

und mit $\tilde{E}(\phi)$ ist auch $*\tilde{E}(\phi)$ quadratintegrierbar. Nun ist aber

$$*^Z(du \wedge \phi) = *^M \phi, \quad *^Z(\phi) = (-1)^p du \wedge *^M \phi,$$

also bereits

$$*\tilde{E}(\phi) = \tilde{E}(*^Z \phi).$$

Für $\phi \in \mathcal{H}^{p-k,k}(M)$ mit $k \geq f/2$ oder $\phi \in \ker \tilde{C}^{[k]}$ ist $\tilde{E}(\phi) = 0$. □

Bemerkung 4.14. Der Beweis zeigt außerdem, dass $*\tilde{E}(\phi) = 0 \in H^p(X)$. ◇

Sei $h = 2l$ und $\mathfrak{J}^k(M) = \text{im } \tilde{C}^{[k]} \subset \mathcal{H}^h(M)$, $k < f/2$.

$$\mathfrak{J}^k(Z) := \mathfrak{J}^k(M) + du \wedge *^M \mathfrak{J}^k(M) \subset \hat{\mathcal{H}}^h(Z), \quad 0 \leq k < f/2$$

ist invariant unter τ_Z . Seien $Q_{k,\pm} \subset \mathfrak{J}^k(Z)$ die ± 1 -Eigenräume von τ_Z und $Q_{\pm} = \bigoplus_{k < f/2} Q_{k,\pm}$.

Sei $W := \tilde{E}(\hat{\mathcal{H}}^h(Z)) \subset \mathcal{H}_{(2)}^h(X)$ und $W_{\pm} := \tilde{E}(Q_{\pm})$. Wegen (78) ist $W_{\pm} \subset \mathcal{H}_{\pm}^h(X)$.

Lemma 4.15.

$$W = \tilde{E}(Q_+) \oplus_Q \tilde{E}(Q_-)$$

und

$$\dim W_+ = \dim W_-$$

Beweis. Alle Formen haben geraden Totalgrad $h = 2l$, so dass $\tau = *$. Wir zeigen zuerst

$$Q_{k\pm} = \{\phi \pm \tau_Z \phi \mid \phi \in \mathfrak{J}^k(M)\}, \quad 0 \leq k < f/2.$$

Offenbar ist $\phi \pm \tau_Z \phi$ in $Q_{k\pm}$. Sei $\psi \in Q_{k\pm}$. Schreibe $\psi = \phi + du \wedge *^M \phi_1$, $\phi, \phi_1 \in \mathfrak{J}^k(X)$.

$$\tau_Z \psi = du \wedge *^M \phi + \phi_1 = \pm \psi.$$

Vergleich der Anteile ohne $du \wedge$ ergibt $\phi_1 = \pm \phi$. Damit ist $\dim Q_{k+} = \dim Q_{k-}$.

Die weiteren Aussagen folgen jetzt daraus, dass $\tilde{E}(\hat{\mathcal{H}}^h(Z)) = \tilde{E}(Q_+ \oplus Q_-)$ nach Konstruktion, und dass \tilde{E} auf $Q_+ \oplus Q_-$ injektiv ist. □

Sei $\psi \in \mathcal{H}_{(2)}^h(X)$. Das Theorem liefert dann die eindeutige Existenz von $\phi_0 \in \text{im } \sum_{l < f/2} \tilde{C}^{[l]} \subset \mathcal{H}^h(M)$, so dass

$$r[\tilde{E}(\phi_0)] = r[\psi].$$

Dazu muss noch gezeigt werden, dass $r[\psi] \in \bigoplus_{k < f/2} H^{*,k}$. Weil ψ quadratintegrierbar ist, muss auch $e^{-au}(\psi \upharpoonright Z) \in L^2\Omega(Z, du^2 + g^M)$ sein. Für Fasergrade $k \geq f/2$ ist $\underline{a} \leq 0$, so dass auch $\|\psi \upharpoonright (\{u\} \times M)\| \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. Weil zudem $d\psi = 0$, folgt $r[\psi] = 0$ wie in Lemma 4.7.

Sei $\psi_! = \psi - \tilde{E}(\phi_0)$. Sowohl ψ als auch $\tilde{E}(\phi_0)$ sind L^2 -harmonisch, also auch $\psi_!$. Außerdem ist $r[\psi_!] = 0$, also ist $\psi_!$ Repräsentant einer Klasse in $H_1^h(X)$. Es ist

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}(\tilde{E}(\phi_0) + \tilde{E}(du \wedge * \phi_0)) + \frac{1}{2}(\tilde{E}(\phi_0) - \tilde{E}(du \wedge * \phi_0)) + \psi_! \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{E}(\phi_0 + \tau_Z \phi_0)}_{\in W_+} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{E}(\phi_0 - \tau_Z \phi_0)}_{\in W_-} + \psi_!\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{H}_1^h(X)$ der Raum der harmonischen Repräsentanten von $H_1^h(X)$.

Lemma 4.16. *Die lineare Abbildung*

$$\begin{aligned}\varrho : \mathcal{H}_{(2)}^h(X) &\rightarrow (W_+ \oplus_Q W_-) \oplus \mathcal{H}_1(X) \\ \psi &\mapsto (\tilde{E}(\phi_0 + \tau_Z \phi_0), \tilde{E}(\phi_0 - \tau_Z \phi_0), \psi_!)\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Injektivität: Sei $\psi \in \mathcal{H}_{(2)}^h(X)$ mit $\varrho(\psi) = 0$. Aus $\tilde{E}(\phi_0 \pm \tau_Z \phi_0) = 0$ folgt $\phi_0 = 0$ und $\psi = \psi_! = 0$.

Surjektivität: Sei $(w_+, w_-, \psi_!) \in (W_+ \oplus_Q W_-) \oplus \mathcal{H}_1$. Nach Definition ist $\psi_! \in \mathcal{H}_{(2)}^h(X)$. Wegen Lemma 4.15 gibt es ϕ_1, ϕ_2 mit

$$w_+ = (\phi_1 + \tau_Z \phi_1), \quad w_- = (\phi_2 - \tau_Z \phi_2) \quad \phi_1, \phi_2 \in \bigoplus_{0 \leq k < f/2} \mathfrak{J}^k(M).$$

Für $\psi = \tilde{E}(\phi_1 + \phi_2) + \psi_!$ gilt dann $\varrho(\psi) = (w_+, w_-, \psi_!)$. □

Weil $W = W_+ \oplus_Q W_-$ und $\mathcal{H}_{(2)}^h(X)$ $*$ -invariant sind, und $\mathcal{H}_{(2)}^h(X) = W \oplus \mathcal{H}_1(X)$ ist, muss $\mathcal{H}_1(X)$ ebenfalls $*$ -invariant sein. Schließlich

$$\begin{aligned}L^2 - \text{sign}(X) &= \dim \mathcal{H}_+^h(X) - \dim \mathcal{H}_-^h(X) \\ &= \dim(\mathcal{H}_1^h(X) \cap \mathcal{H}_+^h(X)) - \dim(\mathcal{H}_1^h(X) \cap \mathcal{H}_-^h(X)).\end{aligned}$$

Dies beweist Satz 4.11. □

Symbolverzeichnis

B	12	\mathcal{H}	11
$E(\Lambda, \psi)$	53	$\Omega^*(B, \mathcal{H}^*(F))$	37
$E_\mu(\Lambda, \psi)$	53	$\Omega^V(M)$	35
F	12	$\Omega^{p,q}$	41
H	15	Π_0	37
H^p	39	Π_\perp	37
$H_{(2)}^p$	39	Σ_s	31
$H^r(B, \mathcal{H}^s(F))$	49	\mathcal{V}	11, 35
H_c^p	39	δ^F	37
$H_{\text{inf}}^p(X)$	72	$\delta^{i,j}$	37
$H_1^p(X)$	72	γ_μ	31
M	12	κ	41
TF	35	∇^W	36
$T^H M$	35	$\nabla^{H(F)}$	40
T_{00}	54	ν_1	57
$T_{00}^{[l]}$	54	π_s	31
$T_{0\nu}^{[l]}$	54	ϱ_u	41
W	35	\square_B	22
X	12	$\tilde{\varrho}_u$	41
X_0	12	\underline{a}	41
Z	12	\underline{d}	41
Δ_X	23, 50	$\tilde{C}(\phi)$	65
Δ_Z	15, 41	$\tilde{E}(\phi)$	65
Δ_h	15	a_k	41
$\Delta_{1,0}$	45	d^F	35
FP	31	$d^{i,j}$	36
$\mathcal{H}^a(B, \mathcal{H}^b(F))$	50	d_k	41
\mathcal{H}_\pm^p	68	e_\pm	52
$\mathcal{H}_{(2)}^p$	39	s	61

Literatur

- [APS] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69
- [Bak] G. Baker, J. Dodziuk, *Stability of spectra of Hodge-de Rham laplacians*, Math. Z. **224**, 327–345 (1997)
- [Bal] W. Ballmann, *On the construction of isospectral manifolds*. Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control, C. Croke, I. Lasiecka, G. Uhlmann, M. Vogelius (eds.), IMA Volumes in Mathematics and its Applications **137**, Springer-Verlag, 2004, 1–14
- [Ba-Wo] H. Baumgärtel, M. Wollenberg, *Mathematical Scattering Theory*, Akademie Verlag, Berlin 1983
- [Bes] Arthur L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer 1987
- [Be-Bo] L. Bérard Bergery, J.-P. Bourguignon, *Laplacians and Riemannian Submersions with totally geodesic fibres*, Illinois J. Math., **26**, No.2, 1982
- [BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer 2004
- [Bi-Lo] J. M. Bismut, J. Lott, *Flat vector bundles, Direct Images and Higher Real Analytic Torsion*, JAMS, Vol. 8 **2**, April 1995
- [Bi-Ch] J. M. Bismut, J. Cheeger, *η -Invariants and their Adiabatic Limits*, JAMS, Vol. 2 **1**, January 1989
- [Bo-Tu] R. Bott, L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982
- [Bo] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups*. Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) **7** (1974), 235–272 (1975)
- [Ca-Pe] G. Carron, E. Pedon, *On the differential form spectrum of hyperbolic manifolds*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **3** (2004), no. 4, 705–747
- [Dai] X. Dai, *Adiabatic Limits, Nonmultiplicativity of Signature, and Leray Spectral Sequence*, Journal of the AMS, Vol. 4, No. 2. (Apr., 1991), pp. 265–321.
- [Jo] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer 1998
- [Fal] M. Falticelli, A. Pastore, S. Ianus, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific 2004
- [Gel] I. M. Gelfand, N. J. Vilenkin, *Verallgemeinerte Funktionen, Band IV*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1964
- [GLP] P. B. Gilkey, J. V. Leahy, J. H. Park, *Spectral Geometry, Riemannian Submersions, and the Gromov-Lawson Conjecture*, Chapman & Hall/CRC Press 1999

- [Glp] L. Guillopé, *Sur la théorie spectrale de quelques variétés non compactes*. In: Séminaire de théorie spectrale de géométrie Chambéry-Grenoble, 1985-1986, 115–126
- [Har] G. Harder, *On the cohomology of discrete arithmetically defined groups.*, Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973), pp. 129–160. Oxford Univ. Press, Bombay, 1975
- [Har2] G. Harder, *On the cohomology of $SL(2, \mathfrak{D})$* , In: Lie groups and their representations (Proc. Summer School on Group Representations of the Bolyai János Math. Soc., Budapest, 1971), pp. 139–150. Halsted, New York, 1975
- [Hus] R. Hussein, *Diplomarbeit*
- [HHM] T. Hausel, E. Hunsicker, R. Mazzeo, *Hodge cohomology of gravitational instantons*, Duke Math. J.122 (2004), no. 3, 485–548
- [Ka] Kato, *Perturbation theory for Linear Operators*, Springer 1966
- [La] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer 1999
- [Lo] J. Lott, *On the spectrum of a finite-volume Negatively-curved manifolds*, American Journal of Mathematics 123 (2001), 185–205
- [McC] J. McCleary: *User's guide to spectral sequences*, Mathematics Lecture Notes Series 12, Publish or Perish (1985)
- [Me] R. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, A.K. Peters, Newton (1991)
- [Mu1] W. Müller, *On the analytic continuation of rank one Eisenstein series*, GAFA 6, No. 3 (1996), 572–586
- [Mu2] W. Müller, *Manifolds with cusps of Rank One*, Lecture Notes in Mathematics 1244, Springer 1987
- [Mu3] W. Müller, *Spectral Theory for Riemannian Manifolds with Cusps and a Related Trace Formula*, Math. Nachr. **111** (1983), 197–288
- [Mu4] W. Müller, unpublished
- [RS-4] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, IV: Analysis of Operators*, Academic Press, New York-London, 1978
- [Rol] W. Roelcke, *Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene II*, Math. Ann. 168 (1966), 261–324
- [Tay] M. Taylor, *Partial differential equations. I. Basic theory*. Applied Mathematical Sciences, 115. Springer-Verlag, New York, 1996
- [Vai] B. Vaillant, *Index- and Spectral Theory for Manifolds with Generalized Fibred Cusps*, Dissertation, Bonn, 2001
- [Web] A. Weber, *L^p -Spectral Theory of Locally Symmetric Spaces with \mathbb{Q} -Rank One*, Math. Phys. Anal. Geom **10** (2007), no. 2, 135–154