Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 4
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Produkte von Gruppen und Körpern*

(a) Seien $(G_1, \circ)$ und $(G_2, \circ)$ zwei Gruppen. Zeige oder widerlege, dass das Produkt $G_1 \times G_2$ zusammen mit der komponentenweisen Verknüpfung

$$\circ : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2, \quad ((g_1, g_2), (h_1, h_2)) \mapsto (g_1 \circ h_1, g_2 \circ h_2)$$

eine Gruppe bildet.

(b) Seien $(K_1, +, \cdot)$ und $(K_2, +, \cdot)$ zwei Körper. Man definiere auf dem Produkt $K_1 \times K_2$ Addition und Multiplikation komponentenweise, d.h. für $x_1, y_1 \in K_1$ und $x_2, y_2 \in K_2$ definiere man

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2);$$
$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2).$$

Zeige oder widerlege, dass $(K_1 \times K_2, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Quaternionen*
Man betrachte die Menge $\mathbb{R}^4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ aller 4-tuple von reellen Zahlen. In dieser Aufgabe bezeichnen wir diese Menge mit $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4$ und verwenden die Schreibweise

$$x_1 + x_2 \cdot i + x_3 \cdot j + x_4 \cdot k := (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

für Elemente aus $\mathbb{H}$; i, j und k sind hier als formale Symbole zu verstehen. Komponentenweise Addition definiert eine Abbildung $+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, d.h.

$$(x_1 + x_2 \cdot i + x_3 \cdot j + x_4 \cdot k) + (y_1 + y_2 \cdot i + y_3 \cdot j + y_4 \cdot k) :=$$
$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \cdot i + (x_3 + y_3) \cdot j + (x_4 + y_4) \cdot k.$$

Weiterhin definiere man eine Multiplikationsabbildung $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, wie folgt:

$$(x_1 + x_2 \cdot i + x_3 \cdot j + x_4 \cdot k) \cdot (y_1 + y_2 \cdot i + y_3 \cdot j + y_4 \cdot k) :=$$
$$(x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2 - x_3 \cdot y_3 - x_4 \cdot y_4) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) \cdot i +$$
$$(x_1 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_4 + x_3 \cdot y_1 + x_4 \cdot y_2) \cdot j + (x_1 \cdot y_4 + x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_4 \cdot y_1) \cdot k.$$

(a) Wir verwenden die Kurzschreibweisen

$1 = 1+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$, $i = 0+1\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$, $j = 0+0\cdot i+1\cdot j+0\cdot k$ und $k = 0+0\cdot i+0\cdot j+1\cdot k$.

Für alle Paare $(x, y) \in \{1, i, j, k\}^2$, berechne man das Produkt $x \cdot y$.

(b) Wir verwenden die Kurzschreibweise $0 = 0+0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$ und betrachten $\mathbb{H}^\star := \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Ist $(\mathbb{H}^\star, \cdot)$ eine Gruppe? (Begründe die Antwort kurz.)

(c) Welche Körperaxiome gelten für $(\mathbb{H}, +, \cdot)$? Handelt es sich um einen Körper? (Begründe die Antwort kurz.)

Bitte wenden.

Abgabe ist am **Freitag 18. November 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Aufgabe 3. (4 Punkte) *Die Charakteristik eines Körpers ist eine Primzahl*
Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Für eine positive ganze Zahl n, bezeichne man mit $n \cdot 1 \in K$ die n-fache Summe des Eins Elements $1 \in K$, d.h.

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} \in K.$$

Wie in der Vorlesung besprochen, ist die Charakteristik von K definiert durch

$$\mathrm{char}(K) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n \cdot 1 \neq 0 \text{ für alle } n \geq 1; \\ \\ \min\{n \geq 1 \mid n \cdot 1 = 0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\mathrm{char}(K) > 0$, so zeige man, dass $\mathrm{char}(K)$ eine Primzahl ist.

(Tipp: Körper sind nullteilerfrei.)

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Eine Variation der komplexen Zahlen*
Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Man betrachte die Menge $K[I] := K^2$, wobei man für Elemente aus $K[I]$ die Schreibweise

$$x_1 + x_2 \cdot I := (x_1, x_2)$$

verwendet; I ist hier als formales Symbol zu verstehen. Komponentenweise Addition definiert eine Abbildung $+ : K[I] \longrightarrow K[I]$, d.h.

$$(x_1 + x_2 \cdot I) + (y_1 + y_2 \cdot I) := (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \cdot I.$$

Weiterhin definiert man eine Multiplikation analog zum Fall der komplexen Zahlen, d.h.

$$(x_1 + x_2 \cdot I) \cdot (y_1 + y_2 \cdot I) := (x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot I.$$

Zeige oder widerlege jeweils für die folgenden Körper $(K, +, \cdot)$, ob $(K[I], +, \cdot)$ einen Körper bildet:

(a) $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;

(b) $(K, +, \cdot) = (\mathbb{C}, +, \cdot)$;

(c) $(K, +, \cdot) = (\mathbb{F}_2, +, \cdot)$;

(d) $(K, +, \cdot) = (\mathbb{F}_3, +, \cdot)$.

Allgemeine Bemerkungen:

- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.