Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder

Wintersemester 2016/17

Anwesenheitsaufgaben für die Tutorien der 7. Woche
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den folgenden Untervektorräumen:

$$U_1 := \langle (1,1) \rangle, \quad U_2 := \langle (1,0), (0,1) \rangle, \quad U_3 := \langle (2,2), (-3,-3) \rangle.$$

Man berechne die Dimensionen folgender Vektorräume, indem man explizite Basen angibt; man fertige außerdem Skizzen der jeweiligen Vektorräume an.

(a) U_1, U_2 und U_3;

(b) $U_1 + U_2$ und $U_1 + U_3$;

(c) $U_1 \oplus U_2$ und $U_1 \oplus U_3$;

(d) $U_1 \cap U_2 \cap U_3$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, W ein K-Vektorraum und seien $U, V \subset W$ Untervektorräume. Sei weiterhin $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von U, und sei $v_1, \dots, v_m$ eine Basis von V. Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

(a) $(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (0, v_1), \dots, (0, v_m)$ ist eine Basis von $U \oplus V$.

(b) Falls $n \geq m$, so ist

$$(u_1, 0), \dots, (u_n, 0), (u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_m, v_m)$$

eine Basis von $U \oplus V$.

(c) Falls $u_i \neq v_j$ für alle i, j, so ist

$$u_1, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m$$

eine Basis von $U + V$.

(d) Falls $n \leq m$ und $u_i = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so sind V und $U + V$ isomorph.

(e) Falls $n \leq m$ und $u_i = v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so sind U und $U \cap V$ isomorph.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(K^2, K) \longrightarrow K^2, \quad f \mapsto (f((1,0)), f((0,1)))$$

ein K-linearer Isomorphismus ist.

Bitte umdrehen.

Aufgabe 4. Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3 - x_2, x_2 - x_3).$$

(a) Bestimme eine Basis des Kerns $\ker(f)$.

(b) Betrachte nun die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^3, +)$ zusammen mit der Untergruppe $(\ker(f), +)$ und berechne die Quotientengruppe $(\mathbb{R}^3, +)/(\ker(f), +)$.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugbarer K-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume mit $\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) = \dim_K(V)$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $U_1 + U_2 = V$;

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$;

(c) $U_1 + U_2$ und $U_1 \oplus U_2$ sind isomorph.