Kleine AG
Torische Geometrie

am 17.02.2007 in Bonn

Organisatoren: Sven Meinhardt (sven@math.uni-bonn.de),
Ulrich Schlickewei (uli@math.uni-bonn.de)

1 Einleitung

Torische Varietäten wurden ursprünglich für die Kompaktifizierung von Modulräumen entwickelt. Mittlerweile spielen sie in verschiedensten Bereichen der Algebraischen Geometrie eine wichtige Rolle, nicht zuletzt da man viele wichtige geometrische Invarianten konkret berechnen kann und Torische Varietäten damit eine Klasse von Beispielen bieten, an der man viele komplizierte Sachverhalte relativ elementar studieren kann.
Das Ziel unseres Programms ist es weniger, alle Beweise bis ins letzte Detail zu verstehen, auch wenn diese meistens technisch nicht besonders schwierig sind. Vielmehr geht es uns darum, anhand von Beispielen die Ideen der ausgearbeiteten Theorie gut zu verstehen.
Nach dem einführenden Vortrag werden wir sehen, wie man Singularitäten torischer Varietäten auflöst, wir werden Geradenbündel und Divisoren auf diesen beschreiben und die Fundamentalgruppe, die Eulercharakteristik und sogar den Kohomologiering berechnen.

2 Programm

1. Vortrag (60 Minuten): Definition und Beispiele

In diesem Vortrag soll erklärt werden, wie man aus Kegeln, Fächern und Polytopen Torische Varietäten konstruiert. Dabei empfiehlt es sich, den Kapiteln 1.2 bis 1.5 in [2] zu folgen, auf die sich alle Verweise in diesem Vortrag beziehen. Anstatt die benötigten Resultate über Kegel vorzuziehen, ist es im Vortrag vielleicht unterhaltsamer, diese an den Stellen zu bringen, wo sie benötigt werden. Ein oder zwei davon kann man exemplarisch beweisen, soweit dies in der Zeit möglich ist, um ein Gefühl dafür zu vermitteln. Ansonsten genügt es, sie zu zitieren.
Nachdem man also zunächst konvexe, polyhedrale Kegel in einem Gitter und die ihnen zugeordnete Halbgruppe definiert hat (man beschränke sich auf striktkonvexe, rationale, polyhedrale Kegel wie auf S.15), muss das Lemma von Gardon behandelt werden (S. 12). Damit ist man schon in der Lage, affine torische Varietäten zu definieren (S. 15f). Die Beschreibung von deren abgeschlossenen

Punkten sollte auf jeden Fall behandelt werden. Anschließend sollten ein paar Beispiele gebracht werden.
Um affine Torische Varietäteten verkleben zu können, braucht man Prop. 2 auf Seite 13. Spätestens an dieser Stelle müssen wir auch die Begriffe Seiten und Facetten eines Kegels einführen. Man definiere nun Fächer (S. 20) und konstruiere die Torische Varietät zu einem solchen. Die Separiertheit von Torischen Varietäten wird aus Proposition 3 auf Seite 14 abgeleitet. An dieser Stelle sind erneut Beispiele nötig, etwa könnte man die Realisierung von $\mathbb{P}^1$ (S. 6) und dann allgemeiner von $\mathbb{P}^n$ (ÜA auf S. 22) als Torische Varietät vorführen.
Nun sind die Inklusion des Torus' $(\mathbb{C}^*)^n$ als dichte, offene Teilmenge in eine Torischen Varietät und dessen Wirkung auf dieser anzusprechen (S. 19 und S. 23). Es folgt hier übrigens, dass Torische Varietäten nach unserer Definition immer birational zu $\mathbb{P}^n$ sind.
Man sollte ebenfalls Morphismen von Torischen Varietäten wie auf S. 18 und S. 22 erklären.
Dann ist die Konstruktion einer Torischen Varietät ausgehend von einem Polytop zu beschreiben (S. 23ff). Auch diese Konstruktion sollte an mindestens einem Beispiel veranschaulicht werden. Man könnte auch ansprechen, dass man die torische Varietät zu einem Polytop als Proj eines geeigneten graduierten Rings definieren kann (siehe dazu [1], S. 13 unten). Das ist kein Zufall, es wird sich später herausstellen, dass Torische Varietäten genau dann projektiv sind, wenn sie von einem Polytop induziert werden.
Wenn noch Zeit bleibt, kann man noch die alternativen Definitionen von torischen Varietäten erwähnen. Man erhält diese auch äquivalent zu unserer Definition als separierte, normale Varietäten über $\mathbb{C}$, die einen Torus als dichte offene Teilmenge enthalten, der kompatibel im Sinne von [2], S. 23 wirkt. Sonst gibt es auch noch die allgemeinere Definition von abstrakten Halbgruppen kommend wie etwa in [3], Kapitel 1.

2. Vortrag (45 Minuten): Singularitäten, Kompaktheit

Man führe den ausgezeichneten Punkt einer affinen, torischen Varietät ein und leite daraus die Charakterisierung von nicht-singulären torischen Varietäten ab ([2], S. 28/29). Damit ist Punkt (b) in Theorem 5.1 in [1] bewiesen. Die Punkte (c) und (d) im selben Theorem sollten angegeben werden, (d) allerdings ohne die Beschreibung der dualisierenden Garbe, die später kommt. Anschließend zeige man, dass torische Varietäten immer normal sind ([2], S. 29 unten).
Nun beschreibe man, wie man Singularitäten torischer Varietäten auflöst ([2], 2.6). Das motivierende Beispiel in der Einleitung des Kapitels sollte gebracht werden, dann wird die allgemeine Strategie der Verfeinerung des Kegels wie in [2] auf Seite 48 vorgestellt. Dass die konstruierte birationale Abbildung eigentlich ist, wie für eine Auflösung von Singularitäten nötig, wird einen Moment später klar. Das Beispiel von Seite 49 ist auch sehr schön und sollte vorgeführt werden.
Im dritten Teil des Vortrags werden 1-Parameter-Untergruppen des Torus untersucht ([2], 2.3). Dies erlaubt einerseits, den Fächer zurückzugewinnen ([2], S. 38, Claim 1 und 2). Andererseits folgt daraus leicht die Proposition auf Seite

39 in [2], die eigentliche Morphismen von torischen Varietäten charakterisiert. Diese Beweise sind sehr einfach und sollten vorgeführt werden. Die Eigentlichkeit von Morphismen findet man auch mit etwas ausführlicherem Beweis in [3], Kapitel 4, Prop. 4.

3. Vortrag (60 Minuten): Die Topologie Torischer Varietäten

In diesem Vortrag sollen einige topologische Invarianten Torischer Varietäten berechnet werden. Den Ausgangpunkt dafür bildet die Proposition auf Seite 57 unten in [2], die besagt, dass für einen n-dimensionalen Kegel[1] die affine Torische Varietät U_σ kontrahierbar und somit topologisch trivial ist. Als Topologie wird hier natürlich die analytische Topologie von $U_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ und nicht die Zariski-Topologie verwendet. Für $\dim \sigma = k < n$ gilt $U_\sigma = U_{\sigma'} \times {\mathbb{C}^*}^{n-k}$ mit kontrahierbarem $U_{\sigma'}$ und der Torus $O_\sigma = (\mathbb{C}^*)^{n-k}$ ist ein Deformationsretrakt von U_σ. (1. Korollar auf Seite 58 in [2]) Als eine erste Anwendung dessen erhält man nun sofort das Korollar auf Seite 57. Mit den sich anschließenden Argumenten folgert man

$$\pi_1(X(\Delta)) = N/N',$$

wobei N' die Untergruppe von N ist, die von allen Gitterpunkten aus den Kegeln des Fächers Δ aufgespannt wird. Als Spezialfall erhält man die Proposition auf Seite 56. Das Ganze sollte nun an ein oder zwei Beispielen illustriert werden.
Als zweite Anwendung berechnen wir die Eulercharakteristik von $X(\Delta)$ und $H^2(X,\mathbb{Z})$. Ausgangspunkt hierfür ist die Spektralsequenz auf Seite 58 unten, die man aus der Čech-Auflösung der konstanten Garbe $\mathbb{Z}_X$ erhält. Die benötigten Kohomologiegruppen $H^q(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p})$ liefert das zweite Korollar auf Seite 58 in [2] und man erhält die Spektralsequenz von Seite 59 oben. Daraus ergibt sich nun relativ leicht

$$\begin{aligned} e(X(\Delta)) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rank} H^i(X,\mathbb{Z}) \;=\; \sharp \text{ n-dim. Kegel in } \Delta \\ H^2(X,\mathbb{Z}) &= \ker\Big(\bigoplus_{i<j} M(\sigma_i \cap \sigma_j) \longrightarrow \bigoplus_{i<j<k} M(\sigma_i \cap \sigma_j \cap \sigma_k)\Big), \end{aligned}$$

mit $M(\sigma) = \sigma^\perp \cap \operatorname{Hom}(N,\mathbb{Z})$ und $\sigma_i \in \Delta$ maximal. Insbesondere ist $H^2(X,\mathbb{Z})$ eine freie Gruppe und jedes Element aus $H^2(X,\mathbb{Z})$ ist die 1. Chern-Klasse eines Geradenbündels.[2]
Mit etwas aufwändigeren Methoden kann man für glatte $X(\Delta)$ sogar den kompletten Kohomologiering $H^*(X,\mathbb{Z})$ berechnen.
Dazu benötigen wir T-invariante abgeschlossene Teilmengen von X. Diese liefert uns der Abschnitt 3.1 aus [2]. Dabei sollen nur die Mengen $V(\tau)$ und $O_\tau \cong (\mathbb{C}^*)^{\operatorname{codim}\tau}$ für $\tau \in \Delta$ eingeführt werden. Die Proposition auf Seite 54 (unten) in [2] sollte genannt werden und an einem einfachen Beispiel (z.B.

[1] n sei dabei der Rang des Gitters N, in dem der Fächer Δ „lebt“.
[2] siehe die Bemerkung und Übung unter der Berechnung von $H^2(X)$ in [2]

$X(\Delta) = \mathbb{C}^2$ oder $\mathbb{P}^2$) kurz illustriert werden. Die Bedeutung der abgeschlossenen Mengen $V(\tau)$ für $\tau \in \Delta$ erschließt sich sofort aus der Proposition auf Seite 96 in [2]. Für glatte projektive Torische Varietäten genügt es sogar, sich auf die Durchschnitte der Hyperflächen $V(\tau_i)$ zu beschränken, wobei $\tau_i \in \Delta$ ein Strahl, also ein 1-dim. Kegel aus Δ ist. Als endgültiges Resultat präsentiere man die Aussagen der Prop. auf Seite 106 und des Korollars auf Seite 104 (ohne Beweis). Als Motivation sollte man noch die Gültigkeit der Relationen zeigen (Bemerkungen auf S. 106 vor der Prop.). Zum Abschluss sollen diese Ergebnisse an einem Beispiel illustriert werden. Schließlich kann man noch darauf hinweisen, dass diese Resultate auch für simpliziale X[3] richtig sind, wenn man überall mit $\mathbb{Q}$ tensoriert.

4. Vortrag (45 Minuten): Divisoren auf Torischen Varietäten

In diesem Vortrag werden Divisoren, genauer gesagt, die T-invarianten Divisoren einer Torischen Varietät berechnet. Dazu benötigen wir die T-invarianten abgeschlossenen Teilmengen $V(\tau)$ von $X(\Delta)$ aus dem vorherigen Vortrag (Abschnitt 3.1 in [2]). Man erhält für die Gruppen T-invarianter Weil- bzw. Cartierdivisoren

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}_T(X(\Delta)) &= \bigoplus_{\substack{\tau\in\Delta \text{ ein} \\ \text{Strahl}}} \mathbb{Z}\cdot V(\tau) = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}\cdot D_i, \\ \mathrm{Cart}_T(X(\Delta)) &= \ker\Big(\bigoplus_i M/M(\sigma_i) \longrightarrow \bigoplus_{i<j} M/M(\sigma_i\cap\sigma_j)\Big),\ \sigma_i \in \Delta \text{ maximal.} \end{aligned}$$

Die Beschreibung von $\mathrm{Div}_T(X(\Delta))$ ist einfach (Seite 60 in [2]). Die Bestimmung von $\mathrm{Cart}_T(X(\Delta))$ erfordert mehr Aufwand. Zunächst schaut man sich den Fall $X(\Delta) = X(\sigma) = U_\sigma$ an. Wem die Argumentation auf Seite 61 in [2] zu kurz ist (bei mir war das der Fall), der kann auch mal einen Blick auf Seite 2 und 3 von Kapitel 6 aus [3] werfen. Das Lemma

$$\mathrm{div}(\chi^u) = \sum_i < u\,, v_i > D_i \quad , \quad D_i = V(\mathbb{R}_{\geq 0} v_i)\ ,\ \tau = \mathbb{R}_{\geq 0} v_i \in \Delta \text{ ein Strahl}$$

sollte auf jeden Fall genannt werden. Der Schritt von U_σ zu $X(\Delta)$ wird dann auf Seite 62 in [2] oder auf Seite 3 in Kap. 6 in [3] erklärt.
Jetzt zeigt man die Existenz des Diagramms

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M/M\cap N'^{\perp} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cart}_T(X(\Delta)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X(\Delta)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M/M\cap N'^{\perp} \arrow[r] & \mathrm{Div}_T(X(\Delta)) \arrow[r] & \mathrm{Cl}(X(\Delta)) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

[3]also für Orbifolds

mit exakten Zeilen, woraus $\operatorname{rank}\operatorname{Pic}(X) \leq \operatorname{rank}\operatorname{Cl}(X) = d - \operatorname{rank} N'$ folgt. N' ist das Gitter, das von den ganzzahligen Vektoren aus den Kegeln von Δ aufgespannt wird, und d ist die Anzahl der Strahlen[4] im Fächer. Ferner ist $\operatorname{Pic}(X(\Delta))$ frei, falls Δ einen Kegel von der Dimension $\operatorname{rank} N'$ besitzt.[5] Der Beweis dieser Behauptungen findet sich nach den Propositionen auf Seite 3 in Kap. 6 aus [3] oder auf Seite 63 in [2]. Dann kann man noch das Korollar auf Seite 64 in [2] kurz skizzieren. Jetzt ist es höchste Zeit, $\operatorname{Pic}(X)$ und $\operatorname{Cl}(X) = A^1(X)$ für ein paar Beispiele auszurechnen. (siehe z.B. Seite 65 in [2])
Zum Abschluss sollte man noch erwähnen, dass der kanonische Divisor von X durch

$$K_X = -\sum_{i=1}^{d} D_i$$

gegeben ist; die dazugehörige reflexive Garbe vom Rang 1 ist gerade die dualisierende Garbe von X. Für glatte X gilt ferner die Formel

$$c(T_X) = \prod_{i=1}^{d}(1 + c^1(\mathcal{O}(D_i))).$$

5. Vortrag (60 Minuten): Kohomologie von Geradenbündeln und projektive Torische Varietäten

Ziel dieses Vortrages ist es, die Kohomologie von Linienbündel zu berechnen und zu entscheiden, wann ein Linienbündel „sehr ampel“ ist. Dadurch erhalten wir ein Projektivitätskriterium für Torische Varietäten.
Wir starten mit einem T-invarianten Cartierdivisor $D \in \operatorname{Cart}_T(X(\Delta))$ und bilden die stetige stückweise lineare Funktion ψ_D sowie das rationale konvexe Polytop $P_D = \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid u \geq \psi_D \text{ auf } |\Delta|\}$ (siehe Seite 66 in [2]). Das Lemma auf Seite 66 liefert dann

$$\Gamma(X, \mathcal{O}(D)) = \bigoplus_{u \in P_D \cap M} \mathbb{C} \cdot \chi^u \ ,$$

d.h. $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma(X, \mathcal{O}(D))$ ist die Anzahl der Gitterpunkte in P_D. Sei nun X eine komplette Torische Varietät, d.h. Δ spannt $N_{\mathbb{R}}$ auf. In diesem Fall ist P_D beschränkt und $\Gamma(X, \mathcal{O}(D))$ endlich dimensional (Prop. auf S. 67). Nun soll gezeigt werden, dass $\mathcal{O}(D)$ genau dann durch globale Schnitte erzeugt wird, wenn ψ_D konkav[6] ist (Prop. auf Seite 68 und die Bemerkungen auf den Seiten 67 und 68). Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}(\Gamma(X, \mathcal{O}(D))).$$

Das Lemma auf Seite 69 beantwortet die Frage, wann diese Abbildung eine abgeschlossene Einbettung liefert, d.h. $\mathcal{O}(D)$ sehr ampel ist. Die eine Bedingung, nämlich die strikte Konkavität, liefert gerade die Eigenschaft ampel zu

[4] also der 1-dimensionalen Kegel
[5] Achtung: In [2] ist die letzte Voraussetzung vergessen worden.
[6] auch „upper convex“ genannt

sein (Prop. auf Seite 70). Für glatte, komplette $X(\Delta)$ impliziert ampel sogar schon sehr ampel (Prop. 5 auf Seite 17 Kap. 6 in [3], muss aber nicht bewiesen werden) und es genügt die strikte Konkavität von ψ_D zu zeigen, um eine Einbettung von X in den $\mathbb{P}^N$ zu erhalten. Schließlich kann man aus P_D den Fächer Δ wie im ersten Vortrag zurückgewinnen und umgekehrt liefert jedes rationale konvexe Polytop P aus dem ersten Vortrag auch einen (sehr) amplen Divisor D mit $P_D = P$. (siehe hierzu S. 72 in [2] und S. 14/15 in Kap. 6 aus [3])
Zum Abschluss wollen wir noch die höheren Kohomologien von $\mathcal{O}(D)$ berechnen. Hierzu folgen wir dem Abschnitt 3.5 in [2]. Da für den Beweis der Prop. (und des Korollars) auf Seite 74 wohl kaum noch Zeit bleibt, sollte man vielleicht stattdessen lieber erklären, wie man relative Kohomologien evtl. berechnen kann. Es gibt z.B. eine lange exakte Sequenz, die die relative Kohomologie mit den Kohomologien von $|\Delta|$ und $Z(u)$ verknüpft.

Literatur

[1] D. Cox, *Minicourse on toric varieties*, http://www.cs.amherst.edu/~dac/lectures/toric.ps.

[2] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, 1993.

[3] M. Mustata, *Toric varieties*, http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/toric_var.