Aufgabe 1 (Ordnung auf der Potenzmenge). Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge.

(a) Zeigen Sie, dass die Inklusion $\subseteq$ eine partielle Ordnungsrelation auf $\mathcal{P}(X)$ ist.

(b) Ist diese Ordnungsrelation auch total?

(c) Unter welchen Voraussetzungen auf X ist die Inklusion eine Wohlordnung auf $\mathcal{P}(X)$?

Aufgabe 2 (Summen). (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1.$$

Aufgabe 3 (Proposition 3.6). Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}})$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.
Bemerkung: Die Existenz additiver Inversen wurde schon in der Vorlesung bewiesen, und das Distributivgesetz ist eine Hausaufgabe.

Aufgabe 4 (Lemma 3.11). Beweisen Sie, dass die Relation

$$[(a,b)] \leq [(c,d)] :\Leftrightarrow a + d \leq c + b.$$

eine wohldefinierte totale Ordnungsrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 5 (Kardinalität). Seien X und Y nicht-leere Mengen. Beweisen Sie, dass $|X| \leq |Y|$ genau dann wenn es eine surjektive Abbildung $Y \to X$ gibt.

Aufgabe 6 (Binomischer Lehrsatz). Sei R ein K1-Ring.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in R$, definieren Sie die Multiplikation na und die Potenz a^n.

(b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in R$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$